

Tome 1 :

# Mécanique des solides indéformables

Lefi ABDELLAOUI





## Sommaire

1. Modélisation des pièces mécaniques : .....	11
2. Position relative de deux solides indéformables : .....	11
2.1. Paramétrage de la position de l'origine <b>O2</b> dans <b>R1</b> (3 paramètres) .....	11
2.2. Paramétrage de l'orientation de la base B2 par rapport à la base B1 (3 paramètres) .....	12
2.3. Degré de liberté.....	14
3. Modélisation et paramétrage des liaisons mécaniques : .....	14
3.1. Liaisons simples : .....	14
a. Appui plan de normale <b>Z</b> : .....	15
b – Liaison linéique rectiligne d'axe <b>X</b> et de normale <b>Z</b> : .....	16
c – Liaison ponctuelle de normale <b>Z</b> : .....	17
d – Liaison pivot glissant d'axe <b>X</b> : .....	17
e – Liaison linéaire annulaire d'axe <b>X</b> : .....	18
f – Rotule de centre O : .....	19
3. 2. Liaisons composées : .....	19
a – Liaison pivot d'axe <b>X</b> : .....	19
b – Liaison glissière d'axe <b>X</b> : .....	20
c. Liaison hélicoïdale d'axe <b>Z</b> : .....	21
3.4. Schéma d'architecture d'un mécanisme : .....	22
4. Paramétrage de mouvements particuliers .....	23
4-1. Mouvement de rotation : .....	23
4-1. Mouvement de translation : .....	23
Exercices : .....	26
Exercice 1: Système bielle manivelle .....	26
Exercice 2 : .....	27
1. Notions de base : .....	29
1.1. Référentiel : .....	29
1.2. Trajectoire : .....	29
1.3. Vecteur vitesse d'un point : .....	29

1.4. Vecteur accélération d'un point : .....	29
2. Vecteurs vitesse et accélération d'un point d'un solide : .....	29
2.1. Vecteur vitesse d'un point d'un solide : .....	29
2.2. Vecteur accélération d'un point d'un solide : .....	30
2.3. Vecteur vitesse instantané de rotation d'un solide : .....	30
3. Dérivation vectorielle : .....	31
Exercices : .....	31
Exercice 1 : Pendule double .....	31
Exercice 2 : Eolienne .....	32
1. Champ des vecteurs vitesses linéaires : .....	33
2. Mouvement particuliers : .....	33
2.1. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe : .....	33
2.2. Mouvement de translation : .....	34
3. Torseur cinématique : .....	35
3.1. Définition : .....	35
3.2. Torseurs cinématiques pour des mouvements particuliers : .....	35
Exercices : .....	36
Exercice 1 : Pendule double .....	36
Exercice 2 : Mécanisme de transfert. (Extrait de CN 2007) .....	36
1. Composition des vecteurs vitesses.....	40
2. Composition des vecteurs vitesses instantanés de rotation : .....	41
3. Composition des torseurs cinématiques.....	41
4. Composition des vecteurs accélération : .....	41
5. Champ de vecteurs accélération instantanées : .....	42
Exercices : .....	42
Exercice 1 : Pendule double .....	42
Exercice 2 : Eolienne .....	43
1. Modélisation du contact ponctuel.....	45
2. Points en contact : .....	45



3. Vitesse de glissement :.....	47
3.1. Définition :.....	47
3.2. Condition cinématique de roulement sans glissement CRSG : .....	47
3.3. Méthode pratique de calcul du vecteur vitesse de glissement : .....	47
Exercices :.....	48
Exercice 1 : Mécanisme de transformation de mouvement.....	48
Exercice 2 : Mécanisme d'ouverture d'une trappe .....	48
Sujet 1 :.....	50
Exercice 1 : Pompe. ....	50
Exercice 2 : Palettiseur pour l'industrie laitière .....	52
Sujet 2 :.....	53
Sujet 3 :.....	57
Sujet 4 :.....	59
Exercice 1 : Mécanisme élévateur .....	59
Exercice 2 : Centre d'usinage 5 axes (extrait du concours ATS GM 2006).....	60
I. Introduction : .....	64
I.1. Définition.....	64
I.2. Classification : .....	64
II. Modélisation des actions mécaniques : .....	64
II.1. Modélisation des actions mécaniques de contact surfacique : .....	64
II.1.1. Modélisation locale : .....	64
II.1.2. Modélisation globale :.....	66
II.2. Modélisation des actions mécaniques de contact ponctuel : .....	67
II.2.1. Actions mécaniques .....	67
II.2.2. Cinématique du contact ponctuel.....	67
II.2.3. Glissement, Roulement et Pivotement .....	68
II.3. Modélisation des actions mécaniques à distance : action de la pesanteur .....	68
Exercices :.....	69
Exercice 1 : Frein d'avion.....	69



1. Extérieur d'un système matériel :	72
I.1. Définition :	72
I.2. Exemple :	72
2. Actions mécaniques extérieures et intérieures :	72
3. Principe fondamental de la statique :	73
4. Théorèmes généraux de la statique :	73
4.1. Théorème de la résultante statique :	73
4.2. Théorème du moment statique :	74
5. Théorème des actions mutuelles :	74
Exercices :	74
Exercice 1 : Système de serrage	74
Exercice 2 : Frein de bicyclette	75
Sujet 1 : Bouche de climatisation	77
Partie 1 :	77
Partie B :	78
Sujet 2 : Barrière de parking	78
Sujet 3 :	81
Exercice 1 : Système à excentrique	81
Exercice 2 : Echelle mobile	82
1. Distribution de masse	85
2. Centre d'inertie :	85
2.1. Définition :	85
2.2. Propriétés :	85
2.3. Premier théorème de Guldin : Centre d'inertie d'une courbe plane	87
2.4. Deuxième théorème de Guldin : Centre d'inertie d'une surface plane	87
2.5. Applications :	88
Application 1 :	88
Application 2 : secteur circulaire d'une couronne ;	88
Application 3 : Cône plein et creux;	89

Application 4 : .....	89
3. Moment d'inertie d'un solide : .....	90
3.1. Définition : .....	90
3.2. Moments d'inertie par rapport aux axes d'un repère.....	90
3.3. Produits d'inertie par rapport aux axes d'un repère.....	90
3.4. Applications : .....	91
Plaque rectangulaire : .....	91
Disque : .....	91
4. Opérateur d'inertie d'un solide : .....	91
4.1. Introduction.....	91
4.2. Opérateur d'inertie.....	92
Définition.....	92
4.3. Matrice d'inertie .....	92
4.3. Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe quelconque .....	93
4.4. Application : Plaque rectangulaire.....	93
5. Base principale d'inertie: .....	93
6. Influence de la symétrie matérielle sur la matrice d'inertie: .....	94
6.1. Symétrie matérielle par rapport à un plan : .....	94
6.2. Symétrie matérielle par rapport à un axe : .....	94
6.3. Symétrie matérielle par rapport à un point : .....	95
7. Théorème de Huyguens: .....	95
Applications : .....	95
Exercices : .....	96
Exercice 1 : .....	96
Exercice 2 : .....	97
Exercice 3 : (Ecole de l'air) .....	97
Exercice 4 : .....	98
1. Torseur cinétique : .....	100
1. 1. Définition.....	100



1.2. Expression de la résultante cinétique.....	100
1.3. Moment cinétique d'un solide : .....	100
2-Torseur dynamique : .....	101
2.1. Définition.....	101
2. 2. Expression de la résultante dynamique.....	101
2.3. Relation entre le moment dynamique et le moment cinétique : .....	102
3-Méthodes de résolution : .....	103
4-Energie cinétique : .....	103
4.1. Définition : .....	103
4.2. Cas du solide : .....	103
Exercices : .....	104
Exercice 1.(pendule double) .....	104
Exercice 2 : (éolienne) .....	105
2. Principe fondamental de la dynamique : .....	107
2. Théorèmes généraux de la dynamique : .....	107
2.1. Théorème de la résultante dynamique : .....	107
2.2. Théorème du moment dynamique : .....	107
2.3. Equation de mouvement : .....	107
2.3.1. Définition 1 : .....	107
2.3-2 Définition 2 : .....	108
2.4. Principe fondamental dans un repère non galiléen : .....	108
Exercices : .....	108
Exercice 1 : .....	108
Exercice 2 : .....	112
Partie1 : .....	112
Partie2 : .....	112
1. Puissance.....	114
1.1. Puissance développée par une action mécanique extérieure à un système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R .....	114



1.1.1. Définition.....	114
1.1.2. Cas d'un solide : .....	114
1.2. Puissance développée par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels : .....	115
1.2.1. Définition.....	115
1.3. Liaison parfaite entre deux solides .....	116
1.3.1 : Définition :.....	116
1.3.2. Cas d'une liaison ponctuelle.....	116
2. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide : .....	117
2.1. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide : .....	117
2.2. Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides : .....	118
Exercices :.....	118



# **Cinématique des solides indéformables**

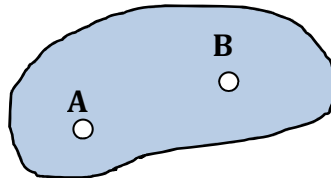


# Modélisation des mécanismes

Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons, appelées liaisons mécaniques, en vue de réaliser une fonction technique précise.

## 1. Modélisation des pièces mécaniques :

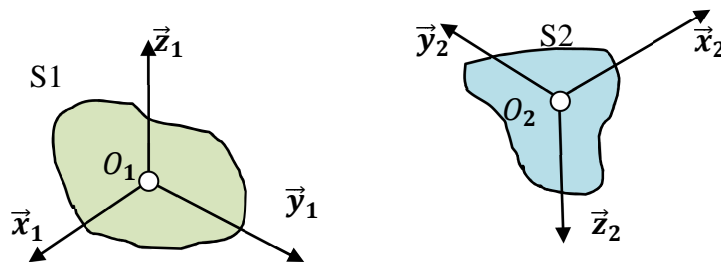
- Les pièces mécaniques sont modélisées par des solides indéformables.
- Le solide (S) est indéformable si quelque soient deux points A et B du solide (S) on a :  $\|\overrightarrow{AB}\| = cte.$



## 2. Position relative de deux solides indéformables :

- Un mécanisme est composé de plusieurs solides indéformables.
- Il est préalablement associé un repère à chacun de ces solides.
- La position relative de deux solides est alors définie par la position relative des repères qui leurs sont associés.

Soient  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  repère lié à S1 et  $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  repère lié à S2.

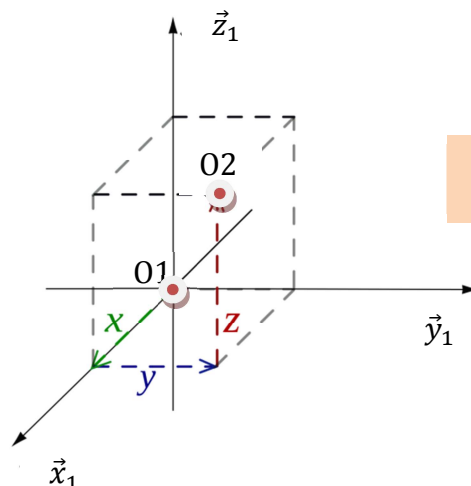


La position de S2 ou  $R_2$  est définie par rapport à S1 ou  $R_1$  par 6 paramètres :

- La position de  $O_2$  dans  $R_1 \rightarrow 3$  paramètres
- L'orientation de la base  $B_1$  associée à  $R_1 \rightarrow 3$  paramètres

### 2.1. Paramétrage de la position de l'origine $O_2$ dans $R_1$ (3 paramètres)

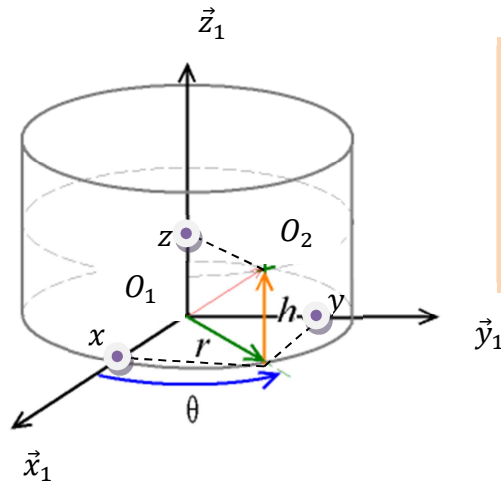
- Coordonnées cartésiennes :



$$\overrightarrow{O_1O_2} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1 + z\vec{z}_1$$



➤ Coordonnées cylindriques :

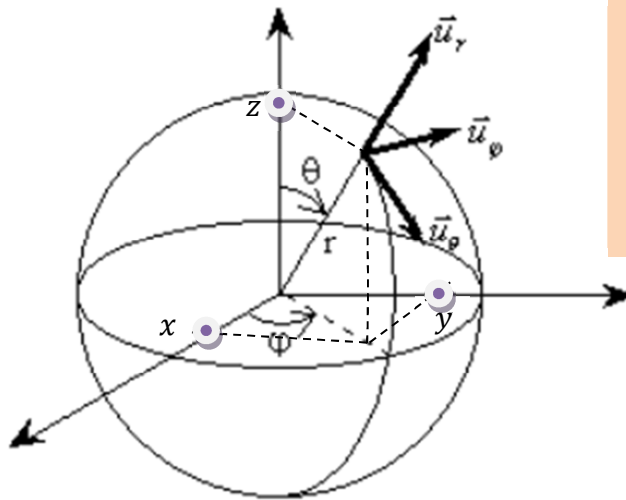


$$\overrightarrow{O_1 O_2} = r\vec{u} + z\vec{z}_1$$

Avec :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

➤ Coordonnées sphériques :



$$\overrightarrow{O_1 O_2} = r\vec{e}_r$$

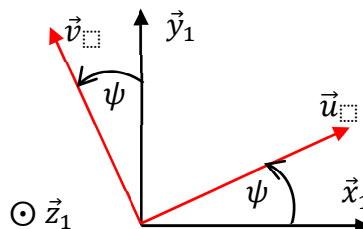
Avec :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

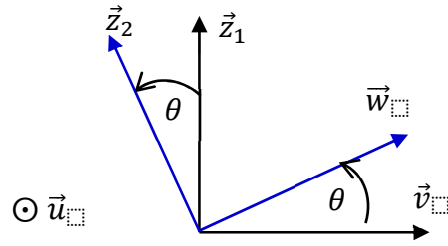
## 2.2. Paramétrage de l'orientation de la base B2 par rapport à la base B1 (3 paramètres)

L'orientation de la base  $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  par rapport à la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  peut être définie par les trois angles d'Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  :

➤ Rotation de  $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$  par rapport à  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  d'un angle  $\psi$  autour de  $\vec{z}_1$ .  
 $\psi = (\vec{x}_1, \vec{u})$  : Angle de Précession

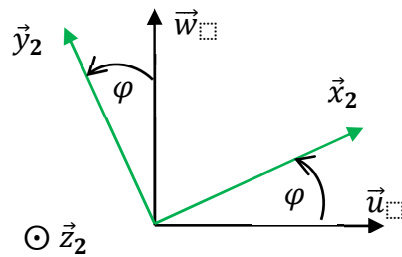


➤ Rotation de  $B''(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2)$  par rapport à  $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$  d'un angle  $\theta$  autour de  $\vec{u}$ .  
 $\theta = (\vec{v}, \vec{w})$  : Angle de Nutation



➤ Rotation de  $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  par rapport à  $B''(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2)$  d'un angle  $\varphi$  autour de  $\vec{z}_2$ .

$\varphi = (\vec{u}, \vec{x}_2)$  : Angle de rotation propre



Rotation  $(\psi, \vec{z}_1)$

Rotation  $(\theta, \vec{u})$

Rotation  $(\varphi, \vec{z}_2)$

$$B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \rightarrow B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1) \rightarrow B''(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2) \rightarrow B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

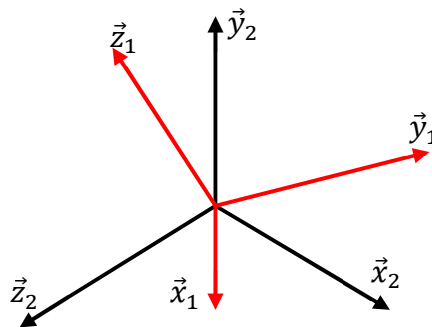
Angle de Précession

Angle de Nutation

Angle de rotation propre

### Position du problème d'une manière plus simple :

Déterminer les rotations nécessaires afin que la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  rattrape la base  $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .



### Première méthode :

- La première étape consiste à faire une rotation autour de  $\vec{z}_1$  d'un angle  $\psi$  appelé angle de précession afin de rendre le vecteur  $\vec{x}_1$  perpendiculaire au vecteur  $\vec{z}_2$ .
- La rotation autour de  $\vec{x}_1$  d'un angle  $\theta$  appelé angle de nutation permet de rattraper  $\vec{z}_1$  avec  $\vec{z}_2$ . ➔ En conséquence :  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$ .
- Une dernière rotation autour de  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  d'un angle  $\varphi$  appelé angle de rotation propre permet de rattraper  $\vec{x}_1$  à  $\vec{x}_2$  et  $\vec{y}_1$  à  $\vec{y}_2$ .

**Deuxième méthode :**

- La première étape consiste à faire une rotation autour de  $\vec{x}_1$  d'un angle  $\psi$  appelé angle de précession afin de rendre le vecteur  $\vec{y}_1$  perpendiculaire au vecteur  $\vec{x}_2$ .
- La rotation autour de  $\vec{y}_1$  d'un angle  $\theta$  appelé angle de nutation permet de rattraper  $\vec{x}_1$  avec  $\vec{x}_2$ . → En conséquence :  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$ .
- Une dernière rotation autour de  $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$  d'un angle  $\varphi$  appelé angle de rotation propre permet de rattraper  $\vec{z}_1$  à  $\vec{z}_2$  et  $\vec{y}_1$  à  $\vec{y}_2$ .

**Troisième méthode :**

- La première étape consiste à faire une rotation autour de  $\vec{y}_1$  d'un angle  $\psi$  appelé angle de précession afin de rendre le vecteur  $\vec{z}_1$  perpendiculaire au vecteur  $\vec{y}_2$ .
- La rotation autour de  $\vec{z}_1$  d'un angle  $\theta$  appelé angle de nutation permet de rattraper  $\vec{y}_1$  avec  $\vec{y}_2$ . → En conséquence :  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$  sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ .
- Une dernière rotation autour de  $\vec{y}_2 = \vec{y}_1$  d'un angle  $\varphi$  appelé angle de rotation propre permet de rattraper  $\vec{z}_1$  à  $\vec{z}_2$  et  $\vec{x}_1$  à  $\vec{x}_2$ .

**2.3. Degré de liberté**

Le degré de liberté d'un solide S2 par rapport à un solide S1 est le nombre de paramètres indépendants définissant au cours du temps la position de S2 par rapport à S1.

- 6 paramètres sont nécessaires pour définir la position relative de deux solides.
- Lorsque deux solides n'ont aucune liaison, le degré de liberté est donc égal à 6.
- Lorsqu'il existe une liaison mécanique entre deux solides, le degré de liberté est strictement inférieur à 6.

**3. Modélisation et paramétrage des liaisons mécaniques :**

Les mécanismes sont constitués de pièces mécaniques en contact physique les unes par rapport aux autres. Ces contacts sont appelés liaisons mécaniques. Ces liaisons sont supposées avoir une géométrie parfaite et sans jeu.

**3.1. Liaisons simples :**

Une liaison simple est une liaison réalisée par le contact de deux surfaces simples : Plan, cylindre et sphère. Le tableau suivant rassemble les six liaisons simples :

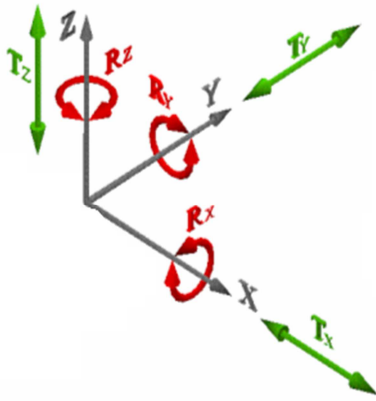
	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	Appui plan	Linéique rectiligne	Ponctuelle
Cylindre	X	Pivot glissant	Linéaire annulaire
Sphère	X	X	Rotule

**Remarque :**

Pour étudier ces liaisons (simples ou composées), on adopte les notations et les hypothèses suivantes :

- Les liaisons sont supposées sans frottement (liaisons parfaites) ;
- Un solide placé librement dans l'espace peut faire six degrés de liberté indépendantes ; trois translations et trois rotations suivant les trois axes du repère choisi (figure suivante).





On note :

- $T_x$  : translation suivant l'axe  $\bar{x}$
- $T_y$  : translation suivant l'axe  $\bar{y}$
- $T_z$  : translation suivant l'axe  $\bar{z}$
- $R_x$  : rotation autour de l'axe  $\bar{x}$
- $R_y$  : rotation autour de l'axe  $\bar{y}$
- $R_z$  : rotation autour de l'axe  $\bar{z}$

- Le torseur cinématique du solide  $j$  dans son mouvement par rapport au solide  $i$  au point  $A$  quelconque est noté par :

$$\{v(j/i)\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}(j/i) \\ \vec{V}(A \in j/i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & v_y \\ \Omega_z & v_z \end{Bmatrix}_R$$

- Le torseur d'action mécanique ou torseur statique du solide  $i$  sur le solide  $j$  au point  $A$  quelconque est noté par :

$$\{F(i \rightarrow j)\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{M}_A(i \rightarrow j) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_R$$

- On note le nombre d'inconnues cinématiques par  $N_c$  (également le nombre de degrés de liberté par ddl)
- On note le nombre d'inconnue statique (inconnues d'actions mécaniques) par  $N_s$

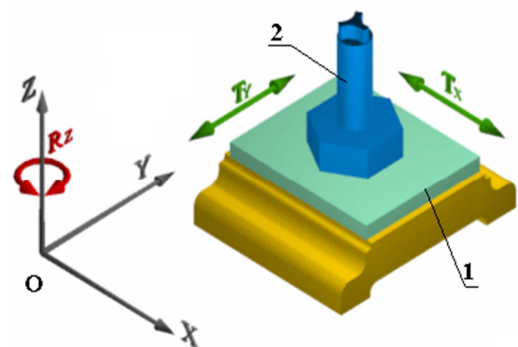
### a. Appui plan de normale $\vec{Z}$ :

#### Modèle géométrique :

La liaison appui plan est réalisée par le contact entre deux surfaces planes. La figure suivante donne un modèle géométrique de cette liaison.

#### Degrés de liberté :

Le solide 2 peut se translater suivant les axes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  et faire uniquement une rotation autour de l'axe  $\bar{z}$ . Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisées et non autorisées :



<b>Translation</b>	$T_x$	$T_y$	<del><math>T_z</math></del>
<b>Rotation</b>	<del><math>R_x</math></del>	<del><math>R_y</math></del>	$R_z$

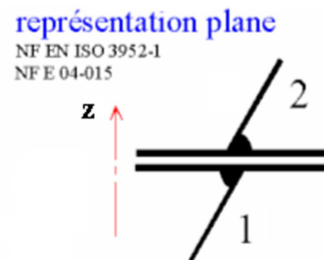
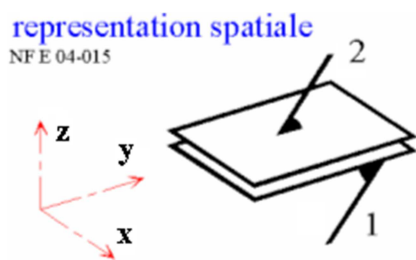
**Torseur cinématique :**  $\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

**Torseur d'action mécanique :**  $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

**Remarque :**

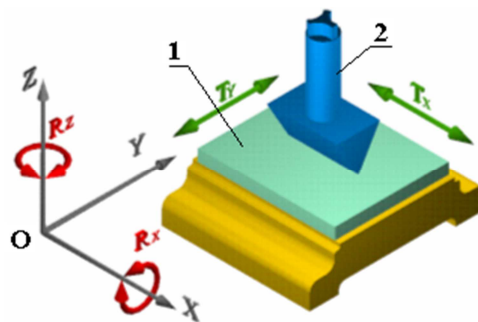
- Le nombre d'inconnues cinématiques est :  $Nc = 3$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est :  $Ns = 3$

**Schématisations normalisées :** Appui plan de normale  $\vec{Z}$



### b - Liaison linéique rectiligne d'axe $\vec{X}$ et de normale $\vec{Z}$ :

La liaison linéique rectiligne est réalisée par le contact entre une surface cylindrique et une autre plane. La figure suivante donne deux modèles géométriques pour cette liaison.



• Le torseur cinématique est :  $\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

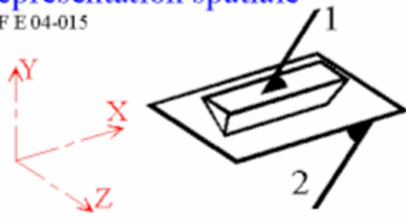
• Le torseur d'actions mécaniques est :  $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

- Le nombre d'inconnues cinématiques est :  $Nc = ddl = 4$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est :  $Ns = 2$

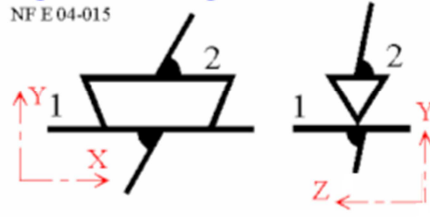


**Schématisations normalisées** : appui linéique d'axe  $\vec{X}$  et de normale  $\vec{Y}$  ;

représentation spatiale  
NF E 04-015

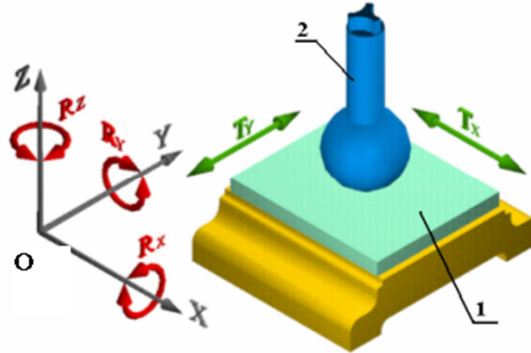


représentation plane  
NF E 04-015



### c - Liaison ponctuelle de normale $\vec{Z}$ :

La liaison ponctuelle est réalisée par le contact entre une surface sphérique et une surface plane.



- Le torseur cinématique du solide 2 dans son mouvement par rapport au solide 1 est le torseur

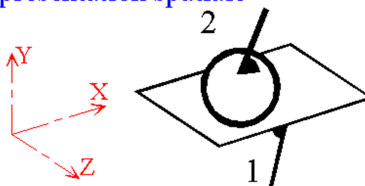
$$\text{suivant : } \{ \vartheta(2/1) \} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$$

- Le torseur d'action mécanique est :  $\{ F(1 \rightarrow 2) \} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$

- Le nombre d'inconnues cinématiques ou degrés de libertés est :  $Nc = ddl = 5$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est :  $Ns = 1$

**Schématisations normalisées** : liaison ponctuelle de normale  $\vec{Y}$

représentation spatiale



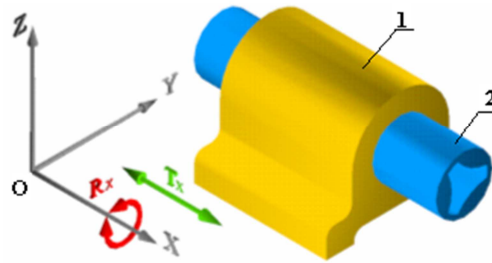
représentation plane  
NF EN ISO 3952-1



### d - Liaison pivot glissant d'axe $\vec{X}$ :

La liaison pivot glissant est réalisée par une surface cylindrique placée dans une autre surface cylindrique.

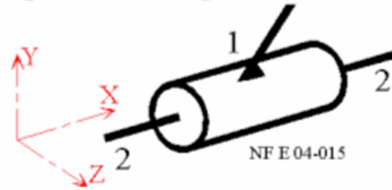




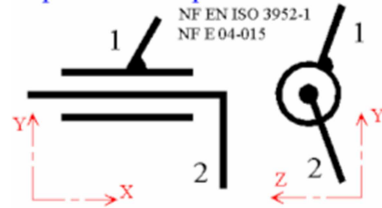
- Le torseur cinématique est :  $\{ \vartheta(2/1) \} = \begin{matrix} \begin{matrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ o \end{matrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le torseur d'action mécanique est :  $\{ F(1 \rightarrow 2) \} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \\ o \end{matrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre de degrés de libertés est :  $Nc = ddl = 2$
- Le nombre d'inconnues d'action mécanique est :  $Ns = 4$

**Schématisations normalisées :** pivot glissant d'axe  $\bar{x}$  ;

représentation spatiale

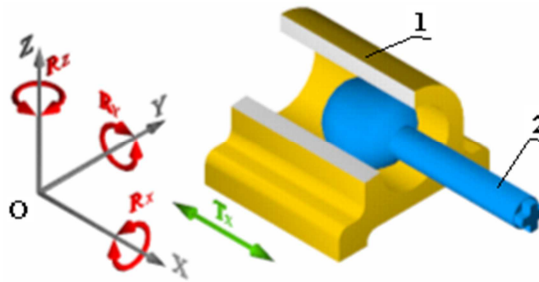


représentation plane



### e - Liaison linéaire annulaire d'axe $\bar{X}$ :

La liaison linéaire annulaire est réalisée par le contact entre une surface sphérique placée dans une surface cylindrique.

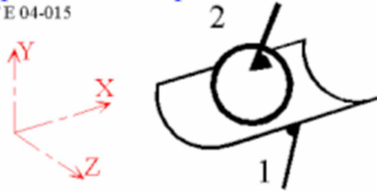


- Le torseur cinématique est :  $\{ \vartheta(2/1) \} = \begin{matrix} \begin{matrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{matrix} \\ o \end{matrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le torseur d'actions mécaniques est :  $\{ F(1 \rightarrow 2) \} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \\ o \end{matrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre d'inconnues cinématiques est :  $Nc = ddl = 4$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est :  $Ns = 2$

**Schématisations normalisées** : linéaire annulaire d'axe  $\vec{x}$  ;

représentation spatiale

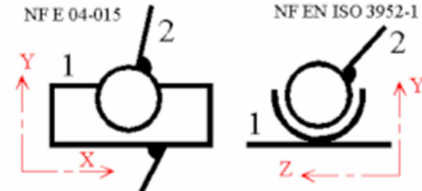
NFE 04-015



représentation plane

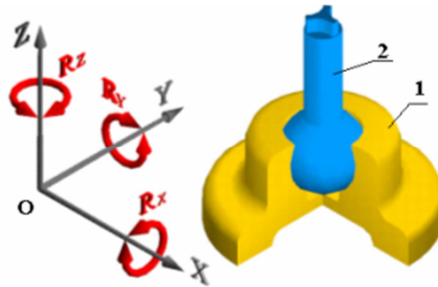
NFE 04-015

NF EN ISO 3952-1



### f - Rotule de centre O :

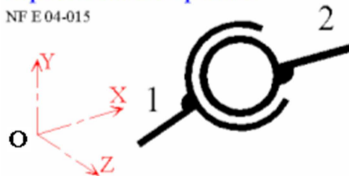
La liaison rotule est réalisée par deux surfaces sphériques.



- Le torseur cinématique est :  $\left\{ \vartheta(2/1) \right\}_O = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
- Le torseur d'action mécanique est :  $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\}_O = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
- Le nombre d'inconnues cinématiques est :  $Nc = ddl = 3$
- Le nombre d'inconnues d'action mécanique est :  $Ns = 3$
- Schématisations normalisées : liaison rotule de centre O

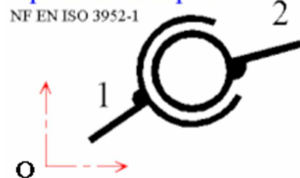
représentation spatiale

NFE 04-015



représentation plane

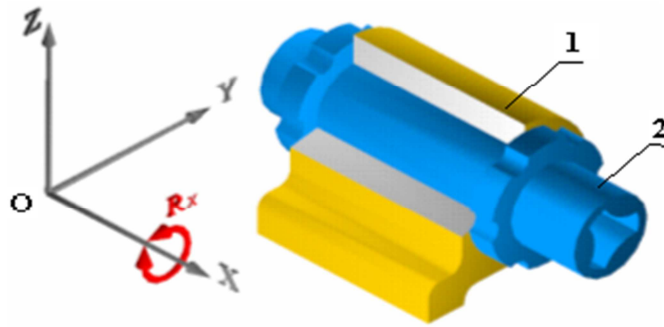
NF EN ISO 3952-1



### 3. 2. Liaisons composées :

#### a - Liaison pivot d'axe $\vec{X}$ :

La liaison pivot n'autorise qu'une seule rotation autour de son axe.



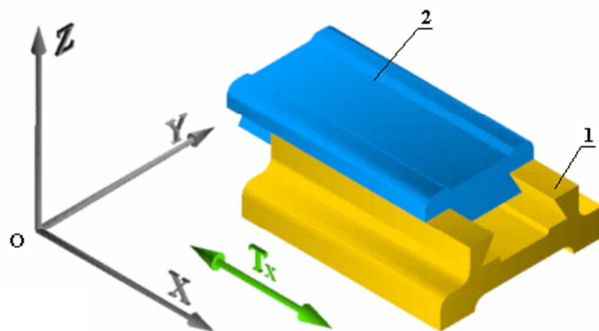
- Le torseur cinématique est :  $\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le torseur d'action mécanique est :  $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre de degrés de liberté est :  $Nc = ddl = 1$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'actions mécaniques est :  $Ns = 5$
- La liaison pivot est obtenue par association en parallèle de deux liaisons rotule ou une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire (voir exemples suivants)

Schémas normalisés : pivot d'axe  $\bar{x}$  ;



### b - Liaison glissière d'axe $\bar{X}$ :

La liaison glissière n'autorise qu'une seule translation.

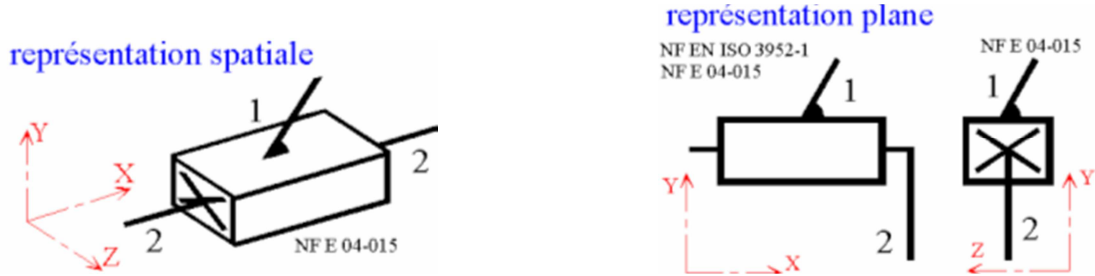


- Le torseur cinématique est :  $\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$



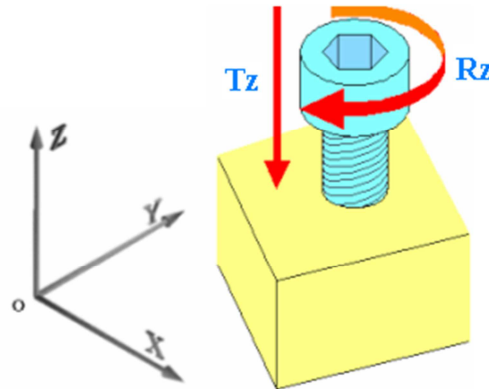
- Le torseur d'action mécanique est :  $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre de degrés de libertés est :  $Nc = ddl = 1$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est :  $Ns = 5$

Schématisations normalisées : glissière d'axe  $\bar{x}$  ;



### c. Liaison hélicoïdale d'axe $\bar{Z}$ :

La liaison hélicoïdale présente une rotation et une translation conjuguées. L'exemple typique de cette liaison est le système vis écrou ; une rotation de la vis est conjuguée avec une translation de celle-ci dans l'écrou. On distingue deux types de filetage ; filetage gauche et filetage droite.



- Le torseur cinématique est :  $\{v(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_z & v_z \end{Bmatrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$  Avec  $v_z = \pm \frac{p}{2\pi} \Omega_z$  ; + ou - selon le

type de filetage.  $p$  : pas de filetage

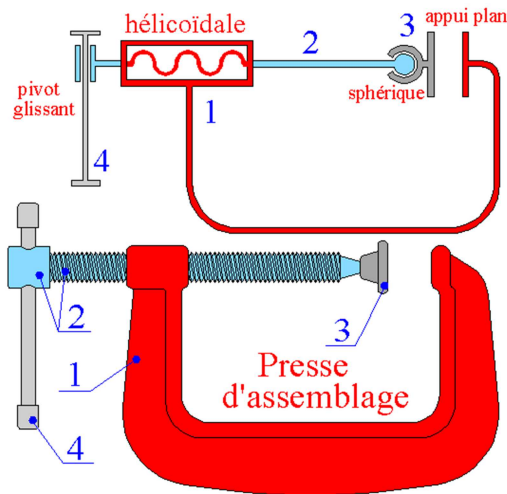
- ✓ Si le filetage est à droite :  $v_z = + \frac{p}{2\pi} \Omega_z$
- ✓ Si le filetage est à gauche :  $v_z = - \frac{p}{2\pi} \Omega_z$

- Le torseur d'actions mécaniques est :  $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

- Avec  $N_{12} = \pm \frac{p}{2\pi} Z_{12}$  ; + ou - selon le type de filetage;

- ✓ Si le filetage est à droite :  $N_{12} = - \frac{p}{2\pi} X_{12}$
- ✓ Si le filetage est à gauche :  $N_{12} = + \frac{p}{2\pi} X_{12}$

- Exemple 1 : étau simple;



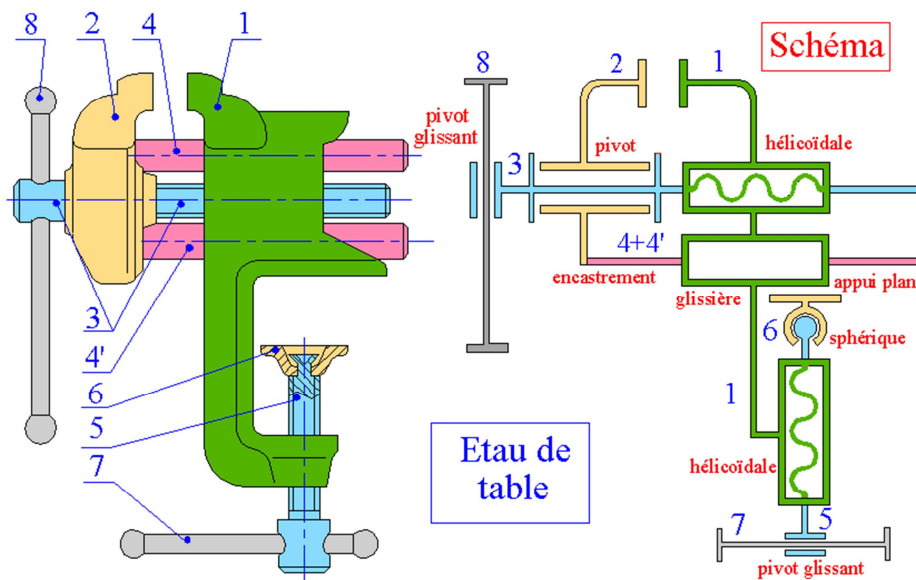
Schématisations normalisées : hélicoïdale d'axe  $\bar{x}$  ;



### 3.4. Schéma d'architecture d'un mécanisme :

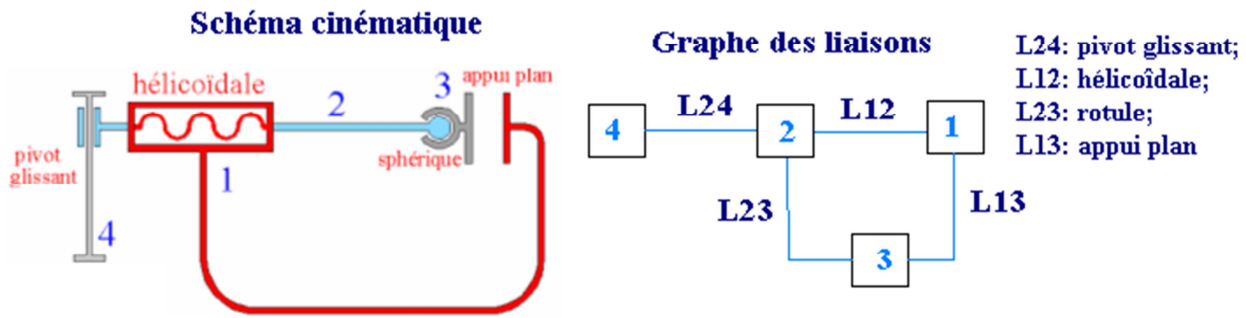
- Schéma cinématique** : Permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme.

Exemple 1 : étau à table ;



- Grphe de liaisons** : Permet de représenter les différentes liaisons entre les différentes pièces du mécanisme, il permet également de déterminer facilement l'extérieur d'une pièce ou un ensemble de pièce.

Exemple 1 : étai simple ;

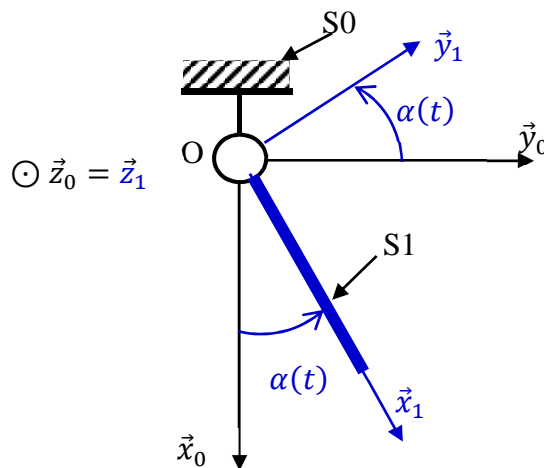


## 4. Paramétrage de mouvements particuliers

### 4-1. Mouvement de rotation :

Le système suivant est composé de :

- Un bâti (S0) lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- Une tige (S1), liée au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (S0) avec  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, ) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1, )$  représente le paramètre de rotation.



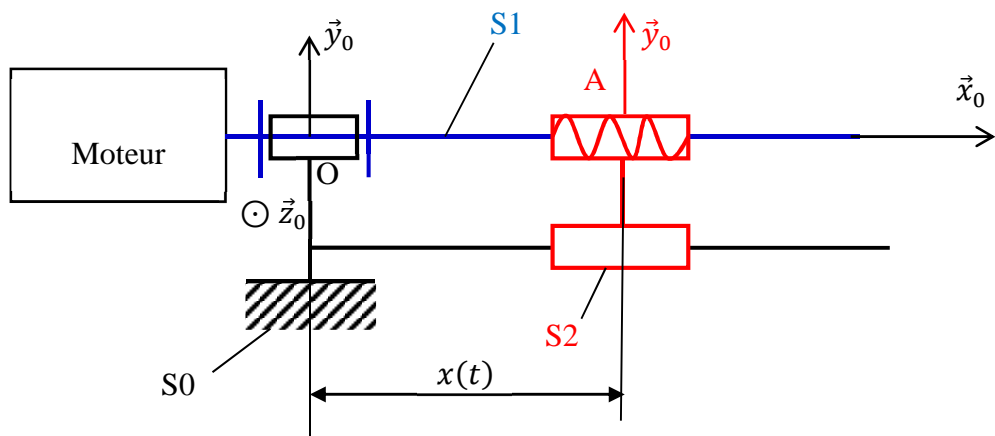
- La vitesse angulaire de S1 par rapport à S0 est déterminé par :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \text{sens} * \text{norme} * \text{direction}$$

### 4-1. Mouvement de translation :

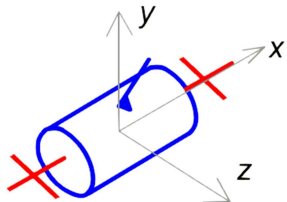
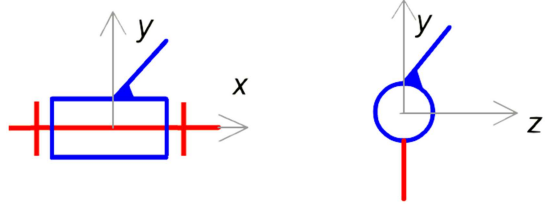
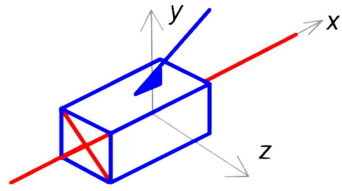
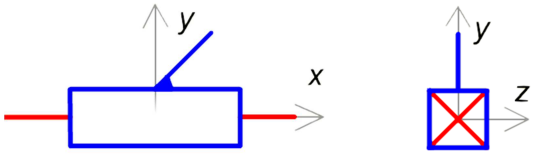
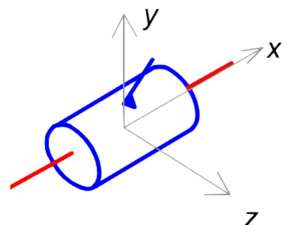
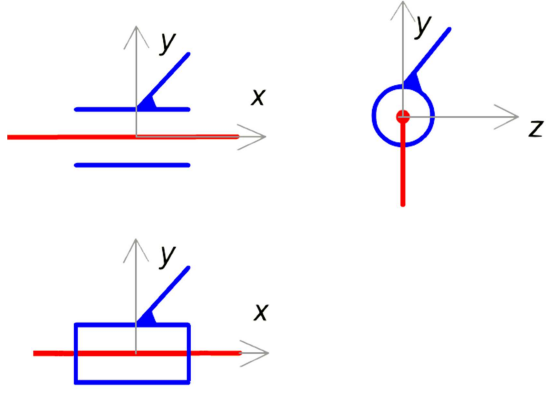
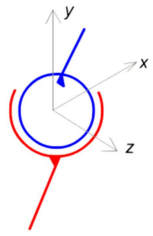
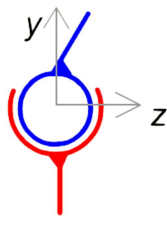
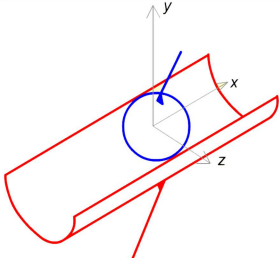
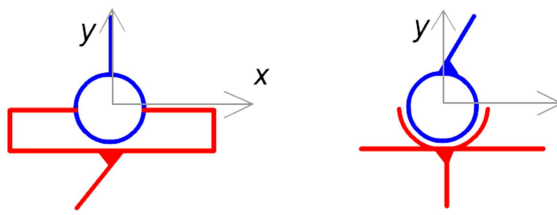
Le système suivant est composé de :

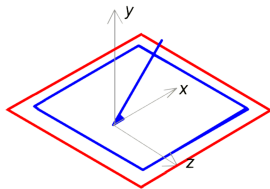
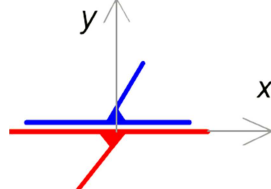
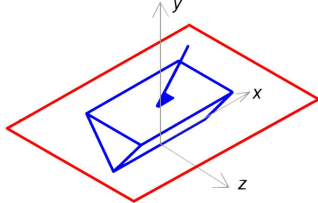
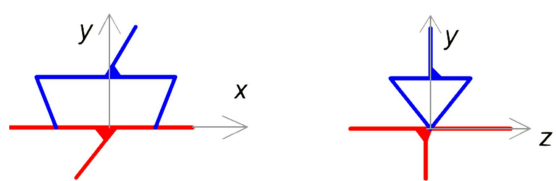
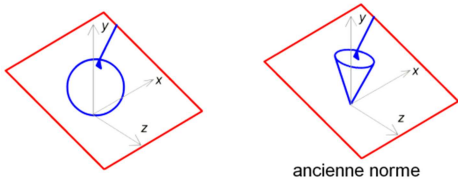
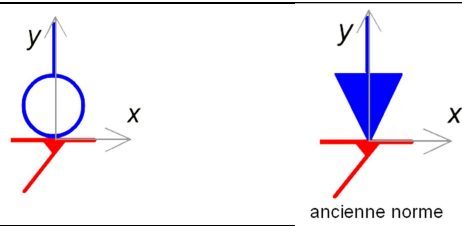
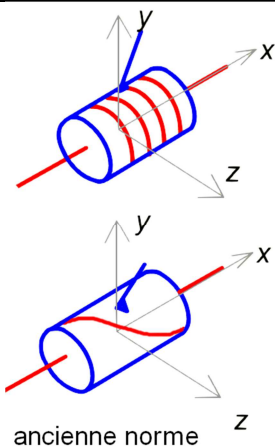
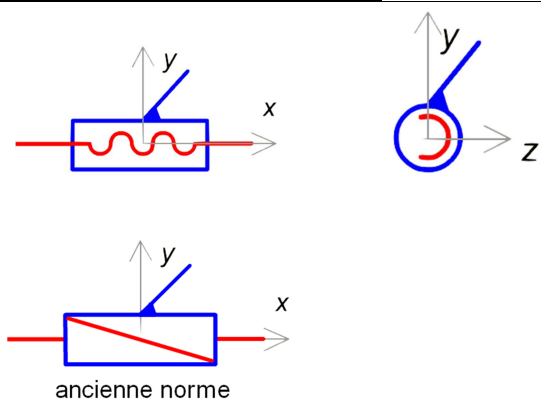
- Un bâti (S0) lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- Une vis (S1), liée au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ , en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bâti (S0) avec  $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1, ) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  représente le paramètre de rotation. La vis S1 est animée d'un mouvement de rotation à l'aide d'un moteur.
- Un coulisseau (S2), lié au repère  $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , en liaison hélicoïdale avec (S1) et en liaison glissière avec (S0).  $\vec{OA} = x(t)\vec{x}_0$





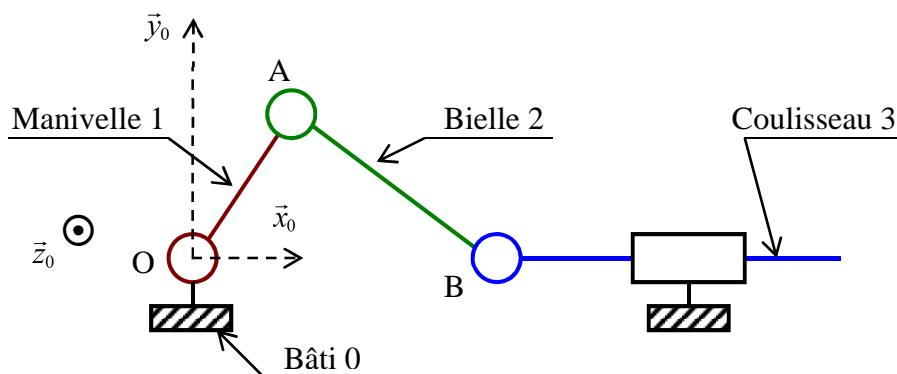
## Annexe : Symboles des liaisons :

LIAISON	SCHÉMATISATION SPATIALE	SCHÉMATISATION PLANE
PIVOT d'axe $(A, \vec{X})$		 <p style="text-align: center;">ancienne norme</p>
GLISSIERE d'axe $(A, \vec{X})$		
PIVOT GLISSANT d'axe $(A, \vec{X})$		 <p style="text-align: center;">symbole admissible</p>
ROTULE de centre A		
LINEAIRE ANNULAIRE d'axe $(A, \vec{X})$		

APPUI PLAN de normale $(A, \vec{Y})$		
LINEAIRE RECTILIGNE de normale $(A, \vec{Y})$ et d'axe $(A, \vec{X})$		
PONCTUELLE de normale $(A, \vec{Y})$		
GLISSIERE HELICOIDALE d'axe $(A, \vec{X})$		

## Exercices :

### Exercice 1: Système bielle manivelle



On donne :  $\vec{OB} = \lambda(t) \vec{x}_0$ ,  $OA = R$ ,  $AB = d$

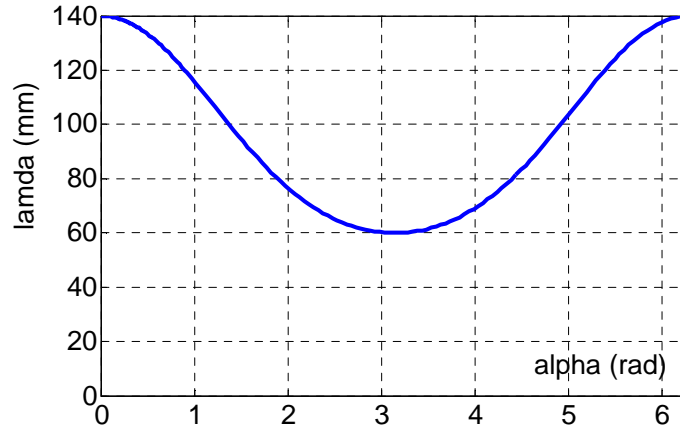
1. Donner le graphe des liaisons en indiquant les spécifications nécessaires pour chaque liaison ;
2. Proposer un paramétrage du système bielle manivelle ;
3. Déterminer les vitesses angulaires suivantes :  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/1)$ ,  $\vec{\Omega}(3/0)$ , et  $\vec{\Omega}(3/2)$

3. Déterminer la loi entrée sortie géométrique (position du coulisseau en fonction de la position angulaire de la manivelle) ;

4. On donne :  $R=40\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$ . On admet que la courbe ci-dessous représente la loi entrée-sortie du système bielle-manivelle. On demande de :

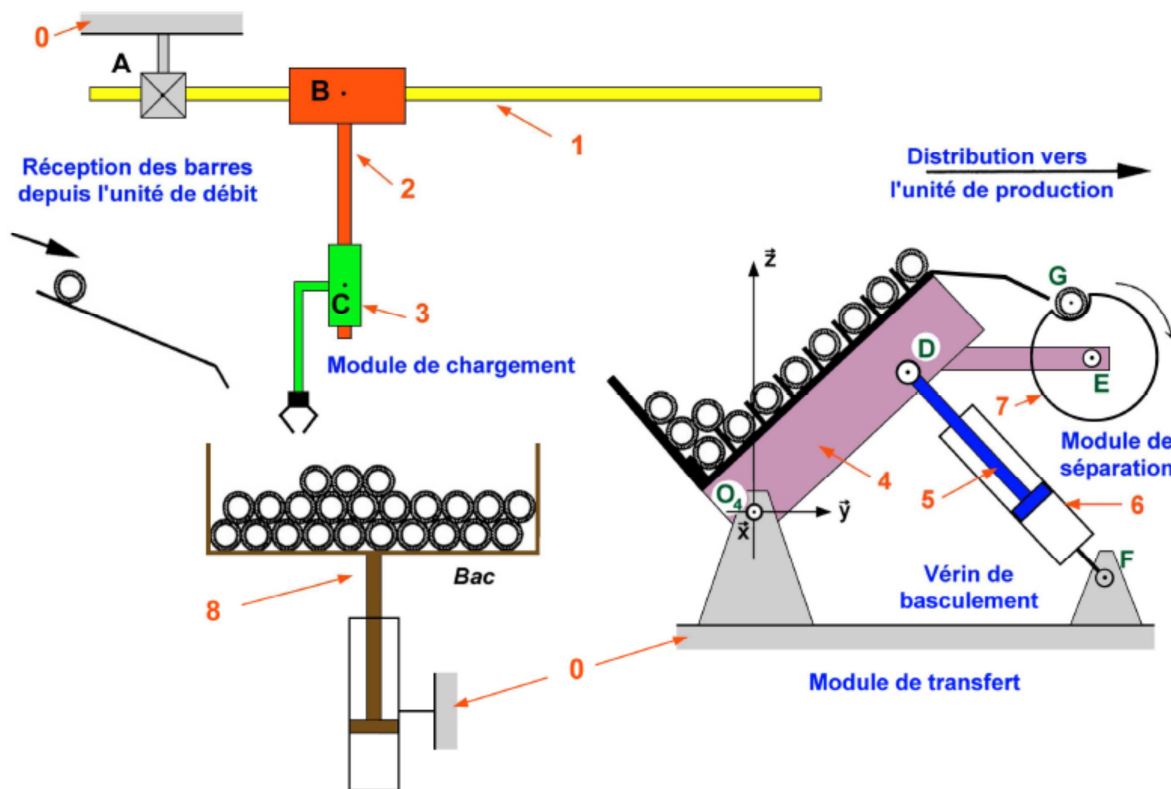
a) Déterminer la course du piston sachant qu'on a  $C = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  ;

b) En adoptant que la vitesse de rotation est constante et égale à  $2\pi \text{ rad/s}$ , déterminer la distance parcourue par le coulisseau 3 au bout de 10s.



### Exercice 2 :

La figure ci-dessous présente la configuration complète du système automatisé de distribution de barres.



Le module de transfert a pour rôle de transférer les barres jusqu'au module de séparation, il comprend un support mobile 4, un tapis roulant compartimenté, monté sur 4 et un vérin hydraulique (5, 6). On s'intéresse au mouvement du support mobile 4, commandé par le vérin hydraulique.

1. Donner le graphe des liaisons du module de transfert et du module de chargement en indiquant la désignation complète de chaque liaison ;
2. Donner le schéma cinématique du module de transfert ;

3. Proposer un paramétrage des différents solides qui constituent le module de transfert;
4. Sachant que  $\overline{O_4F} = a_0\vec{x}_0 - b_0\vec{z}_0$ ,  $OD = a_4$ ,  $DF = \lambda(t)$ . Ecrire les équations qui découlent de la fermeture géométriques de la chaîne des solides du module de transfert. Dédire la loi entrée-sortie sachant que l'entrée est  $\lambda(t)$  et la sortie est  $\alpha(t)$  : position angulaire du support mobile 4.

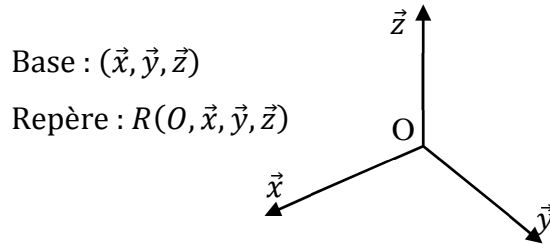


# Cinématique d'un point d'un solide

## 1. Notions de base :

### 1.1. Référentiel :

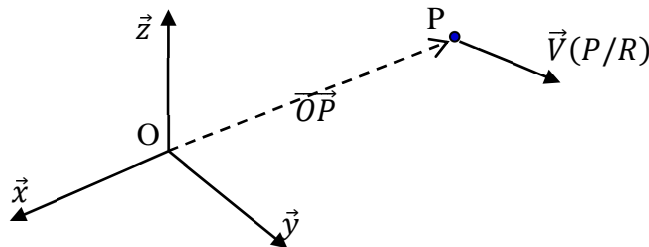
- Le référentiel est constitué d'un repère de référence couplé à une échelle de temps.
- Le repère de référence est associé à un solide de référence.
- Le repère est constitué d'une base et d'un point, appelé origine.



### 1.2. Trajectoire :

- L'ensemble des positions occupées par le point M au cours du temps constitue une courbe appelée trajectoire décrite par le point M.
- Une trajectoire dépend du repère choisi par rapport auquel le mouvement est étudié.
- Une trajectoire est définie par ses équations dans un système de coordonnées.

### 1.3. Vecteur vitesse d'un point :



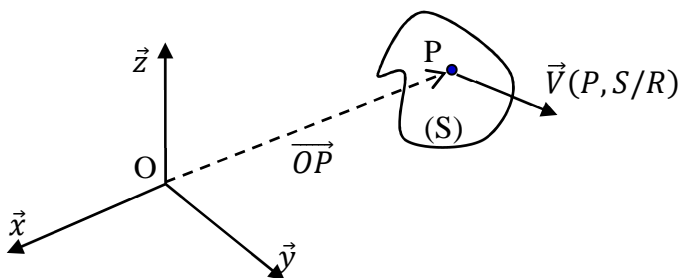
$$\vec{V}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R \text{ avec } O \text{ est l'origine du repère } R.$$

### 1.4. Vecteur accélération d'un point :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right]_R$$

## 2. Vecteurs vitesse et accélération d'un point d'un solide :

### 2.1. Vecteur vitesse d'un point d'un solide :



- ✓  $\vec{V}(P, S/R)$  ou  $\vec{V}(P \in S/R)$ : Vecteur vitesse du point P appartenant à S par rapport à R.
- ✓ Si le point P est une réalité physique sur le solide S,  $\vec{V}(P, S/R) = \vec{V}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R$ . On appelle cette méthode généralement « calcul direct ».
- ✓ Si le point P n'est pas une réalité physique sur le solide S (point de contact par exemple),  $\vec{V}(P, S/R) \neq \vec{V}(P/R)$ .

### 2.2. Vecteur accélération d'un point d'un solide :

- ✓  $\vec{\Gamma}(P, S/R)$  ou  $\vec{\Gamma}(P \in S/R)$ : Vecteur accélération du point P appartenant à S par rapport à R.
- ✓ Si le point P est une réalité physique sur le solide S,  $\vec{\Gamma}(P, S/R) = \vec{\Gamma}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right]_R$ .
- ✓ Si le point P n'est pas une réalité physique sur le solide S (point de contact par exemple),  $\vec{\Gamma}(P, S/R) \neq \vec{\Gamma}(P/R)$ .

### 2.3. Vecteur vitesse instantané de rotation d'un solide :

- ✓  $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(2/1)$  : Le vecteur vitesse instantané de rotation du solide S2 par rapport à S1.
- ✓  $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$  est définie par :
  - ✓ Sa direction : C'est la direction de l'axe autour duquel le solide S2 tourne par rapport à S1.
  - ✓ Sa norme : C'est la vitesse angulaire en rad/s avec laquelle se fait la rotation.
  - ✓ Sens de rotation.

### Exemple pour illustration :

Cas 1	Cas 2
<p>Sens de rotation</p> <p><math>\alpha(t) &gt; 0, \dot{\alpha}(t) &gt; 0 \rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R_0)</math> est de même sens que <math>\vec{z}_0</math></p> <p><math>\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}(t)\vec{z}_0</math> avec <math>\dot{\alpha}(t) &gt; 0</math></p>	<p>Sens de rotation</p> <p><math>\alpha(t) &gt; 0, \dot{\alpha}(t) &lt; 0 \rightarrow \vec{\Omega}(R_1/R_0)</math> est de sens opposé à <math>\vec{z}_0</math></p> <p><math>\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}(t)\vec{z}_0</math> avec <math>\dot{\alpha}(t) &lt; 0</math></p>

### Remarques utiles :

- ✓ La composition des vecteurs vitesses instantanés de rotation est toujours possibles :
 
$$\vec{\Omega}(R_n/R_0) = \vec{\Omega}(R_n/R_{n-1}) + \dots + \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}) + \dots + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$$
- ✓  $\vec{\Omega}(R_i/R_k) = -\vec{\Omega}(R_k/R_i)$

### 3. Dérivation vectorielle :

Soit  $\vec{u}(t)$  un vecteur exprimé dans la base du repère  $R_s(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  lié au solide (S). La dérivation vectorielle de  $\vec{u}(t)$  dans la base de dérivation d'un autre repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est donnée par la formule suivante :

$$\left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R) \wedge \vec{u}(t)$$

**Généralisation :**

Quelque soient la base de dérivation  $R_i$ , on peut admettre :

$$\left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_i} = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R_j} + \vec{\Omega}(R_j/R_i) \wedge \vec{u}(t)$$

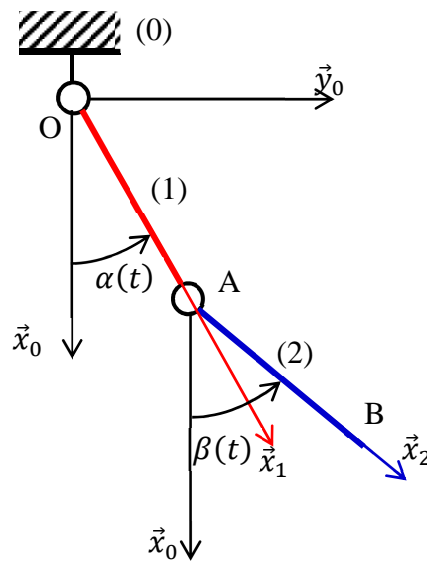
**Exemple :**

$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1 = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1$$

**Exercices :**

#### Exercice 1 : Pendule double

On considère le système de pendule double composé de deux tiges articulées au point A. La tige 1 est articulée au bâti (0) au point O. Les deux tiges sont de longueurs identiques L. Le bâti (0) est lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . La tige (1) est liée au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  et la tige (2) est liée au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ .

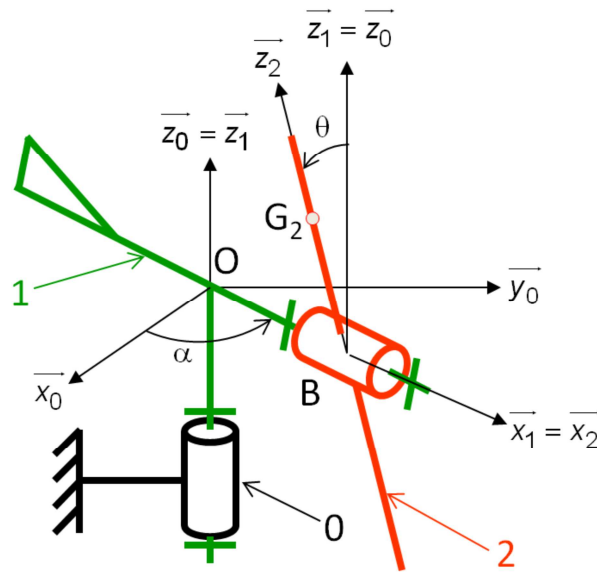


Déterminer par dérivation (méthode directe) :

- ✓  $\vec{V}(A, 1/0)$
- ✓  $\vec{V}(B, 2/1)$
- ✓  $\vec{V}(B, 2/0)$
- ✓  $\vec{\Gamma}(A, 1/0)$
- ✓  $\vec{\Gamma}(B, 2/0)$

## Exercice 2 : Eolienne

On s'intéresse à une éolienne de petite puissance (18 KW) représentée sous forme de schéma cinématique ci-dessous :



Ce système est constitué de trois solides :

- Le mât **0**, de repère associé  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , fixe par rapport au sol tel que l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- Le corps **1**, de repère associé  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au mât **0** tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  et  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ .
- Les pâles **2**, de repère associé  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  par rapport au corps **1** tel que  $\vec{OB} = b \cdot \vec{x}_1$  ( $b$  constant),  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  et  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta$ .

Si un corps étranger percute une pale au point de l'endommager et de créer un « balourd » (centre de gravité  $G_2$  des pâles qui n'est plus sur l'axe de rotation des pâles), des effets dynamiques (vibrations) peuvent apparaître et être à l'origine d'efforts qui vont user anormalement certaines pièces du système.

Dans ce cas, la position du centre de gravité  $G_2$  des pâles est défini par :  $\vec{BG}_2 = c \cdot \vec{z}_2$  ( $c$  constant).

1. Dessiner les deux figures de changement de bases.
  - Déterminer  $\vec{V}(B \in 1/0)$ ,  $\vec{V}(B \in 2/0)$  et  $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$
  - Déterminer  $\vec{\Gamma}(B \in 1/0)$  et  $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0)$

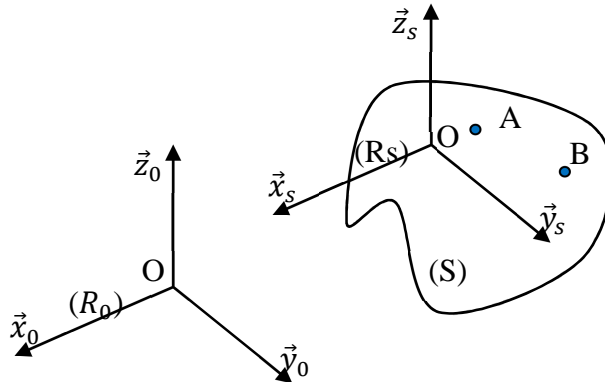




# Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide : Torseur cinématique

## 1. Champ des vecteurs vitesses linéaires :

Soit le solide indéformable (S), en mouvement par rapport à un repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et soient A et B deux points quelconques de (S).



On démontre que :

$$\vec{V}(B, S/R_0) = \vec{V}(A, S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{AB}$$

### Démonstration :

$$\left[ \frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_{R_S} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{AB} = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{AB}$$

Or :

$$\left[ \frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overline{AO}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overline{OB}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{V}(B, S/R_0) - \vec{V}(A, S/R_0)$$

Soit finalement :

$$\vec{V}(B, S/R_0) = \vec{V}(A, S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{AB}$$

### Généralisation :

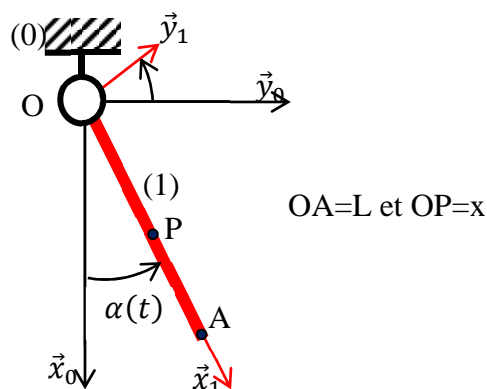
Pour deux points A et B appartenant à un même solide indéformable (S), on a :

$$\vec{V}(B, S/R_0) = \vec{V}(A, S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{AB} = \vec{V}(A, S/R_0) + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$

## 2. Mouvement particuliers :

### 2.1. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

On considère le pendule simple (1) composé d'une tige de longueur L articulé au bâti (0) au point O.



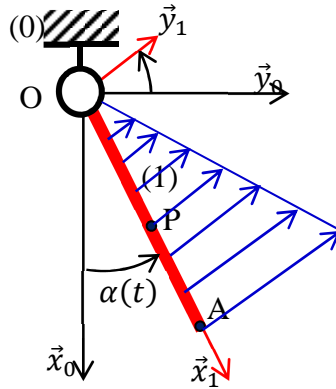
On a :

$$\vec{V}(O, 1/R0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(A, 1/R0) = \vec{V}(O, 1/R0) + \vec{\Omega}(1/R0) \wedge \vec{OA} = \vec{\Omega}(1/R0) \wedge \vec{OA} = L\dot{\alpha}(t)\vec{y}_1$$

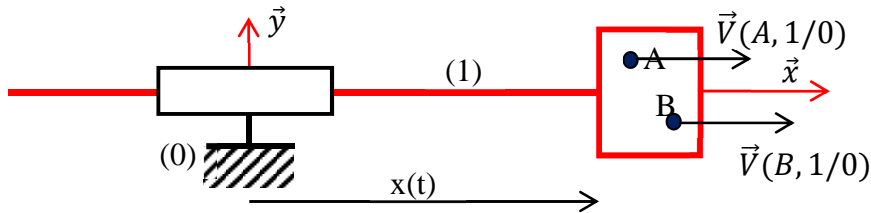
$$\vec{V}(P, 1/R0) = \vec{V}(O, 1/R0) + \vec{\Omega}(1/R0) \wedge \vec{OP} = \vec{\Omega}(1/R0) \wedge \vec{OP} = x\dot{\alpha}(t)\vec{y}_1$$

Si  $\dot{\alpha}(t) = \omega = cte$  alors,  $\|\vec{V}(P, 1/R0)\| = \omega x$ . C'est l'équation linéaire d'une droite de pente  $\omega$ . La figure suivante représente le champ des vecteurs vitesses des points de (1).



## 2.2. Mouvement de translation :

On considère le solide (1) en liaison glissière d'axe  $(O, \vec{x})$  avec le bâti (0).



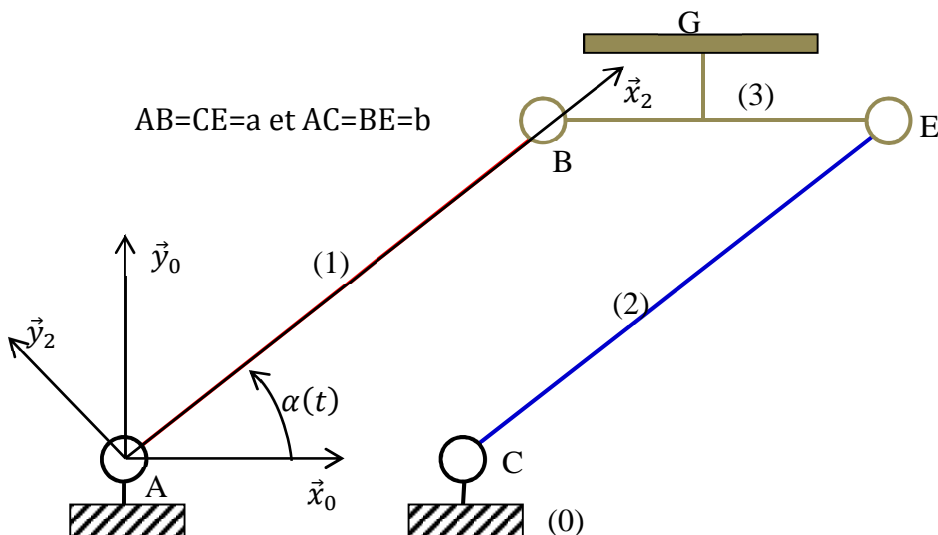
Le solide (1) est en mouvement de translation rectiligne par rapport à (0). Pour cela :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \vec{0} \text{ et } \vec{V}(A, 1/0) = \vec{V}(B, 1/0) = \dot{x}\vec{x}$$

### Remarque :

On distingue deux types de mouvement de translation :

- ✓ Mouvement de translation rectiligne (cas de la liaison glissière)
- ✓ Mouvement de translation circulaire (système à 3 barres, Voir figure ci-dessous)



Le solide (3) est en mouvement de translation circulaire. En calculant  $\vec{V}(B, 3/0)$  et  $\vec{V}(E, 3/0)$  prouver ça.

### 3. Torseur cinématique :

#### 3.1. Définition :

On appelle torseur cinématique du solide (S), au point A, dans son mouvement par rapport à R, le torseur suivant :

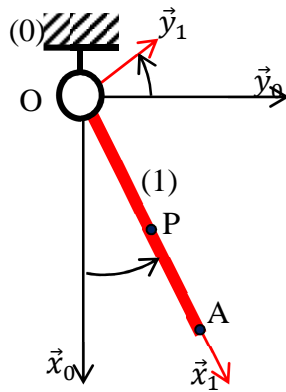
$$\{\mathcal{C}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A, S/R) \end{array} \right\}_A$$

Avec :

- ✓  $\vec{\Omega}(S/R)$  : La résultante cinématique
- ✓  $\vec{V}(A, S/R)$  : Le moment cinématique
- ✓ Pour deux points A et B appartenant à (S), on a :  $\vec{V}(B, S/R) = \vec{V}(A, S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AB} = \vec{V}(A, S/R) + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$

#### 3.2. Torseurs cinématiques pour des mouvements particuliers :

**Mouvement de rotation autour d'un axe fixe :**



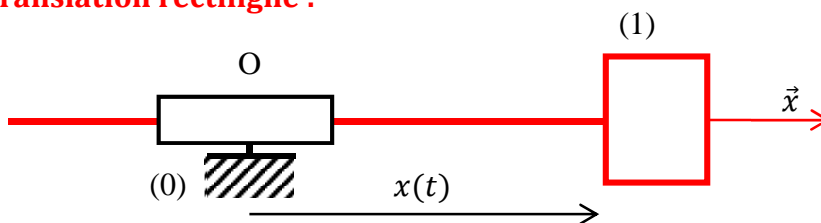
Le solide (1) est en rotation autour d'un axe fixe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport à (0). On a :

- ✓  $\vec{V}(O, 1/0) = \vec{0}$
- ✓  $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha} \vec{z}_0$

D'où, le torseur cinématique de (1) par rapport à (0) au point O est le torseur suivant :

$$\{\mathcal{C}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & \dot{\alpha} \end{array} \right\}_{R0}$$

**Mouvement de translation rectiligne :**



Le solide (1) est en translation par rapport à (0) de paramètre  $x(t)$ . on a :

- ✓  $\vec{\Omega}(1/0) = \vec{0}$

$$\checkmark \vec{V}(O, 1/0) = \dot{x}\vec{x}$$

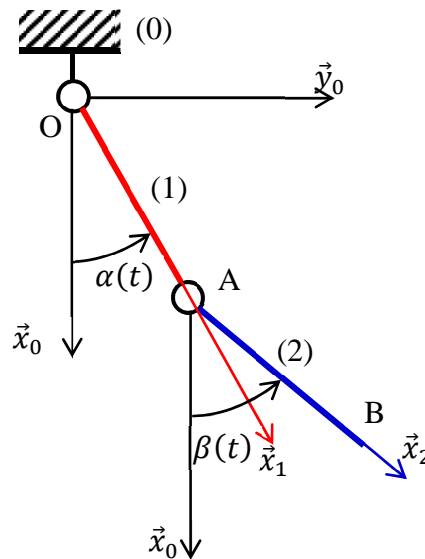
D'où, le torseur cinématique de (1) par rapport à (0) au point O est le suivant :

$$\{\vartheta(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}\vec{x} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

## Exercices :

### Exercice 1 : Pendule double

On considère le système de pendule double composé de deux tiges articulées au point A. La tige 1 est articulée au bâti (0) au point O. Les deux tiges sont de longueurs identiques L. Le bâti (0) est lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . La tige (1) est liée au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  et la tige (2) est liée au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ .



Déterminer par la méthode de champ des vecteurs vitesses :

- ✓  $\vec{V}(A, 1/0)$
- ✓  $\vec{V}(B, 2/1)$
- ✓  $\vec{V}(B, 2/0)$

Déterminer les torseurs cinématiques suivants :

- ✓  $\{\vartheta(1/0)\}_O$  et  $\{\vartheta(1/0)\}_A$
- ✓  $\{\vartheta(2/1)\}_A$  et  $\{\vartheta(2/1)\}_B$
- ✓  $\{\vartheta(2/0)\}_A$

Calculer et interpréter :

- ✓  $\overline{AB} \cdot \vec{V}(A, 2/0)$  et  $\overline{AB} \cdot \vec{V}(B, 2/0)$

### Exercice 2 : Mécanisme de transfert. (Extrait de CN 2007)

La figure suivante présente un modèle cinématique simplifié de ce mécanisme de chargement des verres.

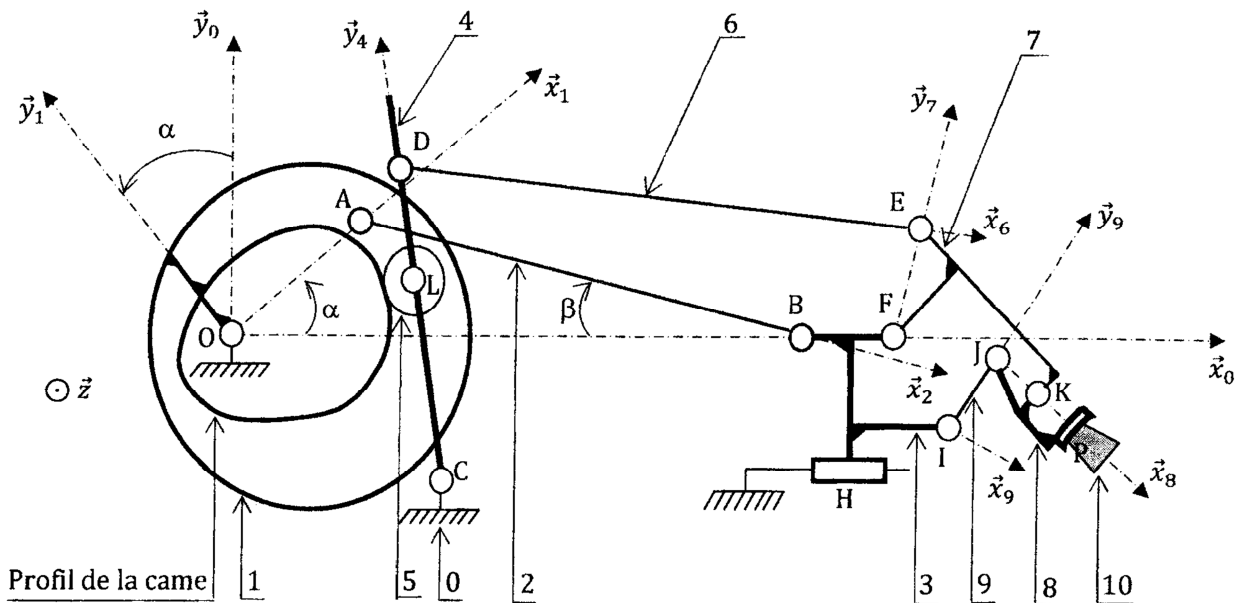


Figure1 : modèle cinématique minimal du système de chargement des verres

Le mécanisme du système de chargement (figure 2) est composé de :

- Un bâti fixe (0) auquel on associe le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$  ;
- Un plateau (1) en liaison pivot excentré d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti (0). Il est entraîné en rotation par un moto réducteur ;
- Une bielle (2), en liaison pivot excentré d'axe  $(A, \vec{z})$  avec le plateau (1) ;
- Un coulisseau (3) en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z})$  avec la bielle (2) d'une part et en liaison glissière d'axe  $(H, \vec{x}_0)$  avec le bâti (0) d'autre part ;
- Un levier (4) en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z})$  avec le bâti (0). Ce levier est entraîné en rotation par l'intermédiaire d'une came taillée sur la face arrière du plateau (1) ;
- Un galet (5) en liaison pivot d'axe  $(L, \vec{z})$  avec le levier (4) d'une part et en contact supposé ponctuel avec le profil de la came d'autre part ;
- Une bielle (6) en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{z})$  avec le levier (4) ;
- Un renvoi (7) en liaison pivot d'axe  $(F, \vec{z})$  avec le coulisseau (3) d'une part et en liaison pivot d'axe  $(E, \vec{z})$  avec la bielle (6) d'autre part ;
- Un préhenseur (8) constitué d'un ensemble d'organes (corps, vérin, ventouse, etc.) qui seront considérés fixes entre eux. Il est en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{z})$  avec le renvoi (7) et en liaison pivot d'axe  $(J, \vec{z})$  avec une biellette (9). Cette dernière est en liaison pivot d'axe  $(I, \vec{z})$  avec le coulisseau (3).

## Paramétrage et données géométriques :

A chaque solide (i) est associé un repère orthonormé direct de base  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$ . Ces bases sont définies de la façon suivante :

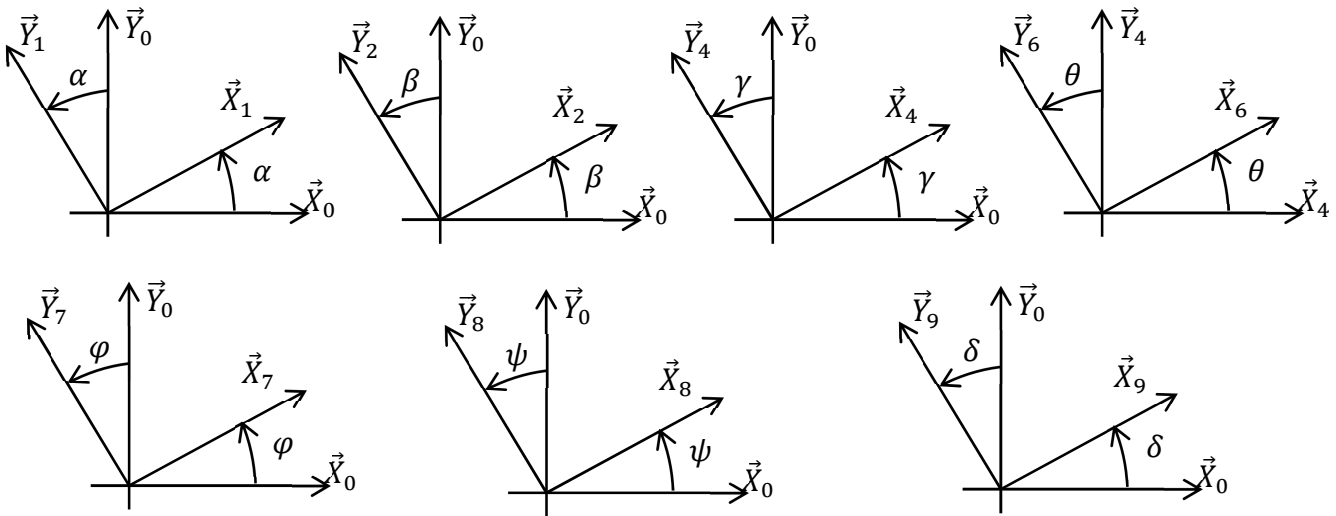


Figure 2 : Figures de changement de base

On donne :

$$\overrightarrow{OA} = r\vec{x}_1, \overrightarrow{AB} = L_2\vec{x}_2, \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{x}_0, \overrightarrow{CD} = L_4\vec{y}_4, \overrightarrow{DE} = L_6\vec{x}_6, \overrightarrow{FE} = b_7\vec{y}_7, \overrightarrow{FK} = a_7\vec{x}_7, \overrightarrow{IJ} = b_9\vec{y}_9, \overrightarrow{JK} = a_8\vec{x}_8, \overrightarrow{FI} = a_3\vec{x}_0 - b_3\vec{y}_0.$$

$r, L_2, L_4, L_6, b_7, a_7, b_9, a_8, a_3$  et  $b_3$  sont des constantes positives.

$\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \varphi$  et  $\psi$  sont des paramètres variables en fonction de temps.

### 1. Etude de la chaîne 0-1-2-3-0 ; identification de $\dot{\beta}$ et de $\dot{\lambda}$ :

1.1. Ecrire la condition de fermeture géométrique de la chaîne 0-1-2-3-0. en déduire deux relations scalaires entre  $\alpha, \beta$  et  $\lambda$  ;

1.2. Ecrire, dans la base du repère  $R_0$ , les torseurs cinématiques représentants :

- Le mouvement du plateau (1) par rapport au bâti (0) au point A ;
- Le mouvement de la bielle (2) par rapport au bâti (0) au point B. les composantes seront exprimées en fonction des paramètres  $\alpha, \beta$  et de leurs dérivées ;
- Le mouvement du coulisseau (3) par rapport au bâti (0) au point B. Les composantes seront exprimées en fonction du paramètre  $\lambda$  et de sa dérivée.

1.3. En se basant sur la composition du vecteur vitesse au point B, déduire deux relations scalaires entre  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  et  $\dot{\lambda}$ . (On peut vérifier qu'il s'agit de la dérivée temporelle des relations géométriques déterminée précédemment).

### 2. Etude de la chaîne 0-4-6-7-3-0 ; identification de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\varphi}$ :

2.1. Ecrire, dans la base du repère  $R_0$ , les torseurs cinématiques représentants :

- Le mouvement du levier (4) par rapport au bâti (0) au point D ;
- Le mouvement de la bielle (6) par rapport au bâti (0) au point E. les composantes seront exprimées en fonction des paramètres  $\gamma, \theta$  et de leurs dérivées ;
- Le mouvement du renvoi (7) par rapport au bâti (0) au point E. Les composantes seront exprimées en fonction du paramètre  $\lambda, \varphi$  et de leurs dérivées ;

**2.2.** En se basant sur la composition du vecteur vitesse au point E, déduire deux relations scalaires entre  $\dot{\lambda}, \dot{\gamma}, \dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$ .

**3. Etude de la chaîne 3-7-8-9-3 ; identification de  $\dot{\delta}$  et de  $\dot{\psi}$  :**

**3.1.** Ecrire la condition de fermeture géométrique de la chaîne 3-7-8-9-3 . En déduire, par projection dans la base du repère  $R_0$ , deux relations scalaires entre  $\varphi, \delta$  et  $\psi$  ;

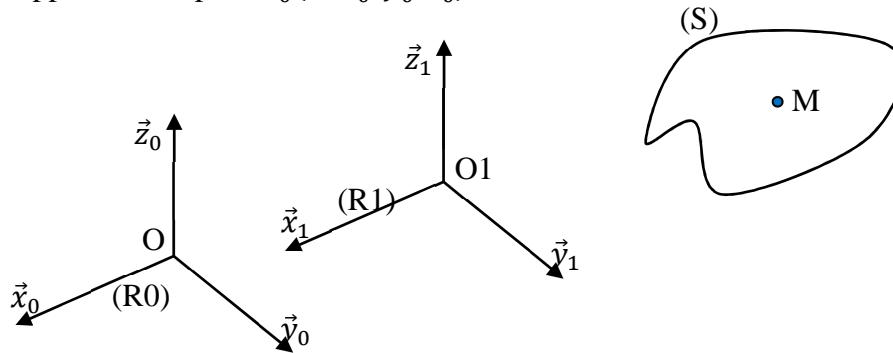
**3.2.** Déduire deux relations scalaires entre  $\dot{\varphi}, \dot{\delta}$  et  $\dot{\psi}$ .



# Composition de mouvement des solides indéformables

## 1. Composition des vecteurs vitesses

Soit le solide indéformable (S), en mouvement par rapport à un repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  qui est lui-même en mouvement par rapport à un repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .



On démontre que :

$$\vec{V}(M, S/R_0) = \vec{V}(M, S/R_1) + \vec{V}(M, R_1/R_0)$$

Vecteur vitesse absolue

Vecteur vitesse relative

Vecteur vitesse d'entraînement

### Remarque :

$\vec{V}(M, R_1/R_0)$  : Le point M ne présente pas une réalité physique dans le repère R1. Cela veut dire que le point M est supposé fixe dans R1. → Attention au calcul de  $\vec{V}(M, R_1/R_0)$ .

### Démonstration :

$$\vec{V}(M, S/R_0) = \vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overline{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overline{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{V}(O_1, R_1/R_0) + \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}$$

Or :

$$\left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overline{O_1M} = \vec{V}(M, S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overline{O_1M}$$

Ce qui permet de déduire à partir des équations précédentes :

$$\vec{V}(O_1, R_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overline{O_1M} = \vec{V}(M, R_1/R_0)$$

D'où :

$$\vec{V}(M, S/R_0) = \vec{V}(M, S/R_1) + \vec{V}(M, R_1/R_0)$$

### Généralisation :

$$\vec{V}(M, S/R) = \vec{V}(M, S/R_n) + \dots + \vec{V}(M, R_i/R_{i-1}) + \dots + \vec{V}(M, R_1/R_0)$$



Dans le cas il y a plus de trois repère, les notions de vecteur vitesse relative et vecteur vitesse d'entraînement ne sont plus significatifs.

## 2. Composition des vecteurs vitesses instantanés de rotation :

On démontre que :

$$\vec{\Omega}(R2/R) = \vec{\Omega}(R2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0)$$

### Démonstration :

Soit  $\vec{u}(t)$ , un vecteur quelconque. On a :

$$\left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R1} = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{u}(t) \quad (1)$$

$$\left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R1} = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R1) \wedge \vec{u}(t) \quad (2)$$

(2)-(1)  $\rightarrow$

$$\left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R2} + \left( \vec{\Omega}(R2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R) \right) \wedge \vec{u}(t)$$

$$\text{Or } \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R) \wedge \vec{u}(t)$$

$$\text{Donc : } \vec{\Omega}(R2/R) = \vec{\Omega}(R2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R)$$

### Généralisation :

$$\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R_n) + \dots + \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}) + \dots + \vec{\Omega}(R_1/R)$$

## 3. Composition des torseurs cinématiques

On a d'après les paragraphes 1 et 2 :

$$\vec{V}(M, S/R) = \vec{V}(M, S/R_n) + \dots + \vec{V}(M, R_i/R_{i-1}) + \dots + \vec{V}(M, R_1/R)$$

$$\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R_n) + \dots + \vec{\Omega}(R_i/R_{i-1}) + \dots + \vec{\Omega}(R_1/R)$$

Soit en utilisant les notations de torseur cinématique, on a :

$$\{\vartheta(S/R)\}_A = \{\vartheta(S/R)\}_A + \dots + \{\vartheta(R_i/R_{i-1})\}_A + \dots + \{\vartheta(R_1/R)\}_A$$

## 4. Composition des vecteurs accélération :

On démontre que :

$$\vec{\Gamma}(M, S/R0) = \vec{\Gamma}(M, S/R1) + \vec{\Gamma}(M, R1/R0) + \vec{\Gamma}_{coriolis}$$

Avec :

- ✓  $\vec{\Gamma}(M, S/R0)$  : Vecteur accélération absolue
- ✓  $\vec{\Gamma}(M, S/R1) = \left[ \frac{d\vec{V}(M, S/R1)}{dt} \right]_{R1}$  : Vecteur accélération relative
- ✓  $\vec{\Gamma}(M, R1/R) = \vec{\Gamma}(O1, R1/R) + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(R1/R)}{dt} \right]_R \wedge \overline{O1M} + \vec{\Omega}(R1/R) \wedge (\vec{\Omega}(R1/R) \wedge \overline{O1M})$  : Vecteur accélération d'entraînement.
- ✓  $\vec{\Gamma}_{coriolis} = 2\vec{\Omega}(R1/R) \wedge \vec{V}(M, S/R1)$

NB : Dans le calcul de l'accélération, cette relation est très peu utilisée.

## Démonstration :

La composition des vecteurs vitesses donne :

$$\vec{V}(M, S/R0) = \vec{V}(M, S/R1) + \vec{V}(M, R1/R0)$$

Par dérivation :

$$\vec{\Gamma}(M, S/R0) = \left[ \frac{d\vec{V}(M, S/R1)}{dt} \right]_{R0} + \left[ \frac{d\vec{V}(M, R1/R0)}{dt} \right]_{R0}$$

Or :

$$\left[ \frac{d\vec{V}(M, S/R1)}{dt} \right]_{R0} = \left[ \frac{d\vec{V}(M, S/R1)}{dt} \right]_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \vec{V}(M, S/R1) = \vec{\Gamma}(M, S/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \vec{V}(M, S/R1)$$

Pour le deuxième morceau de l'équation, le point M ne représente pas un point physique sur R1. D'où :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{V}(M, R1/R0)}{dt} \right]_{R0} &= \left[ \frac{d(\vec{V}(O_1, R1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{O_1M})}{dt} \right]_0 \\ &= \vec{\Gamma}(O_1, R1/R0) + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(R1/R0)}{dt} \right]_{R0} \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R0} \end{aligned}$$

Avec :

$$\left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R0} = \left[ \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right]_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{O_1M} = \vec{V}(M, S/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{O_1M}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M, S/R0) &= \vec{\Gamma}(M, S/R1) + \vec{\Gamma}(O_1, R1/R0) + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(R1/R0)}{dt} \right]_{R0} \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \\ &(\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{O_1M}) + 2\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \vec{V}(M, S/R1) \end{aligned}$$

## 5. Champ de vecteurs accélération instantanées :

D'après la relation de champ de vecteurs vitesses on a :

$$\vec{V}(B, S/R0) = \vec{V}(A, S/R0) + \vec{\Omega}(S/R0) \wedge \overline{AB}$$

Par dérivation, on a :

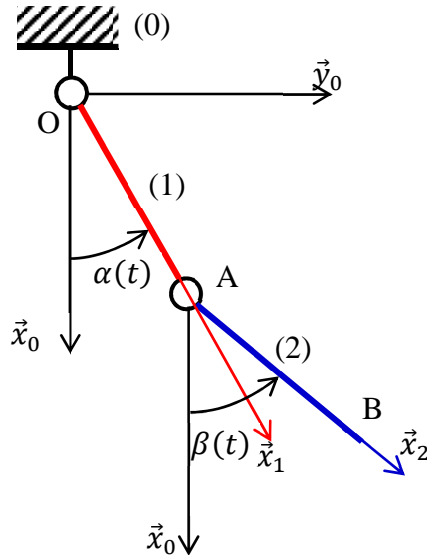
$$\vec{\Gamma}(B, S/R0) = \vec{\Gamma}(A, S/R0) + \left[ \frac{d\vec{\Omega}(S/R0)}{dt} \right]_{R0} \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}(S/R0) \wedge \left[ \frac{d\overline{AB}}{dt} \right]_{R0}$$

Le champ des vecteurs accélération n'est pas antisymétrique et ne peut en aucun cas être représenté par un torseur.

## Exercices :

### Exercice 1 : Pendule double

On considère le système de pendule double composé de deux tiges articulées au point A. La tige 1 est articulée au bâti (0) au point O. Les deux tiges sont de longueurs identiques L. Le bâti (0) est lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . La tige (1) est liée au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  et la tige (2) est liée au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ .



Déterminer par la méthode de composition de mouvement :

- ✓  $\vec{V}(A, 2/0)$
- ✓  $\vec{V}(B, 2/0)$

Déterminer par la méthode de composition les torseurs cinématiques suivants :

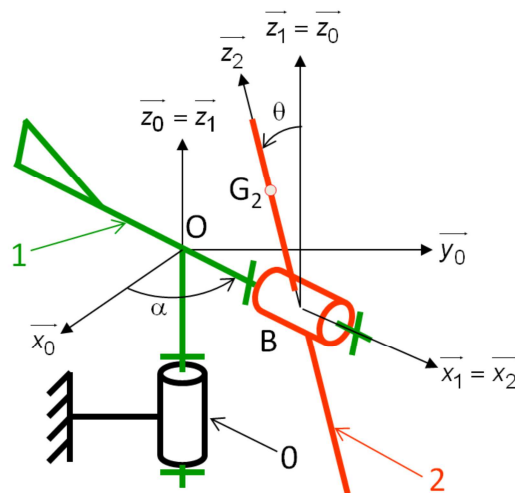
- ✓  $\{\vartheta(2/0)\}_A$
- ✓  $\{\vartheta(2/0)\}_B$

Déterminer par la méthode de dérivation et par composition :

- ✓  $\vec{\Gamma}(B, 2/0)$

### Exercice 2 : Eolienne

On s'intéresse à une éolienne de petite puissance (18 KW) représentée sous forme de schéma cinématique ci-dessous :



Ce système est constitué de trois solides :

- Le mât **0**, de repère associé  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , fixe par rapport au sol tel que l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- Le corps **1**, de repère associé  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  par rapport au mât **0** tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  et  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ .

- Les pâles **2**, de repère associé  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  par rapport au corps **1** tel que  $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{x}_1$  ( $b$  constant),  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  et  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta$ .

Si un corps étranger percute une pale au point de l'endommager et de créer un « balourd » (centre de gravité  $G_2$  des pâles qui n'est plus sur l'axe de rotation des pâles), des effets dynamiques (vibrations) peuvent apparaître et être à l'origine d'efforts qui vont user anormalement certaines pièces du système.

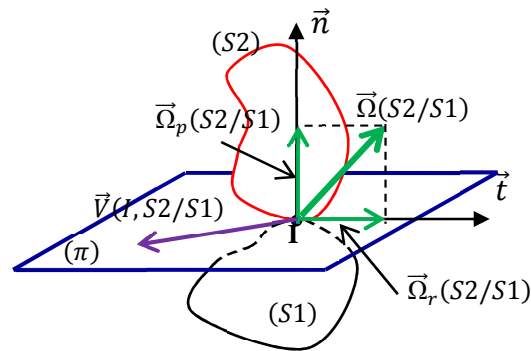
Dans ce cas, la position du centre de gravité  $G_2$  des pâles **2** est défini par :  $\overrightarrow{BG_2} = c \cdot \vec{z}_2$  ( $c$  constant).

2. Dessiner les deux figures de changement de bases.
3. Déterminer les torseurs cinématiques suivants :
  - $\{\vartheta(1/0)\}_O$
  - $\{\vartheta(2/0)\}_B$
  - Déterminer  $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$  par dérivation, par composition de mouvement et par champ de vitesse
  - Déterminer  $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0)$



# Cinématique des solides indéformables en contact ponctuel

## 1. Modélisation du contact ponctuel



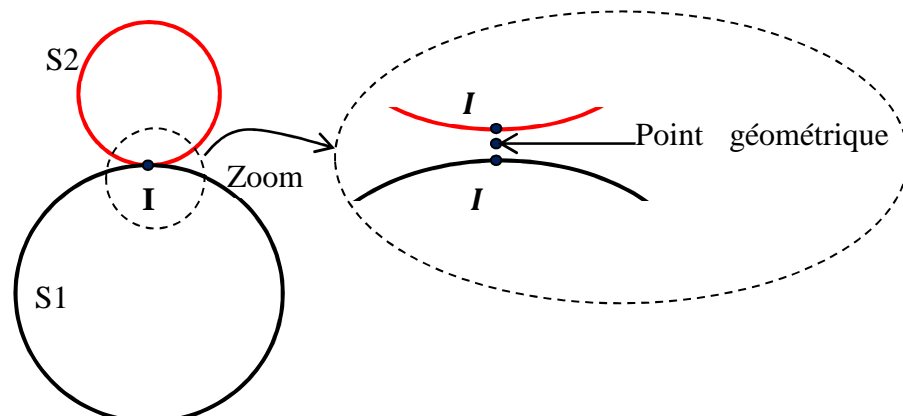
Le solide S1 et S2 sont en contact ponctuel au point I. On note :

- ✓ I le point de contact.
- ✓  $(\pi)$  le plan tangent aux deux solides.
- ✓  $\vec{n}$  le vecteur normal au plan  $(\pi)$ .
- ✓  $\vec{t}$  le vecteur tangent au plan  $(\pi)$ .
- ✓  $\vec{V}(I, S2/S1)$  le vecteur vitesse de glissement au point I de S2 par rapport à S1. Il appartient au plan  $(\pi)$ .
- ✓  $\vec{\Omega}(S2/S1)$  le vecteur vitesse angulaire de S2 par rapport à S1
- ✓  $\vec{\Omega}_p(S2/S1)$  le vecteur vitesse angulaire de pivotement porté par  $\vec{n}$
- ✓  $\vec{\Omega}_r(S2/S1)$  le vecteur vitesse angulaire de roulement porté par  $\vec{t}$
- ✓  $\vec{\Omega}(S2/S1) = \vec{\Omega}_p(S2/S1) + \vec{\Omega}_r(S2/S1)$

Le torseur cinématique de S2 par rapport à S1 au point de contact I est donné par :

$$\{\mathcal{C}(S2/S1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S2/S1) \\ \vec{V}(I, S2/S1)_I \end{Bmatrix}$$

## 2. Points en contact :



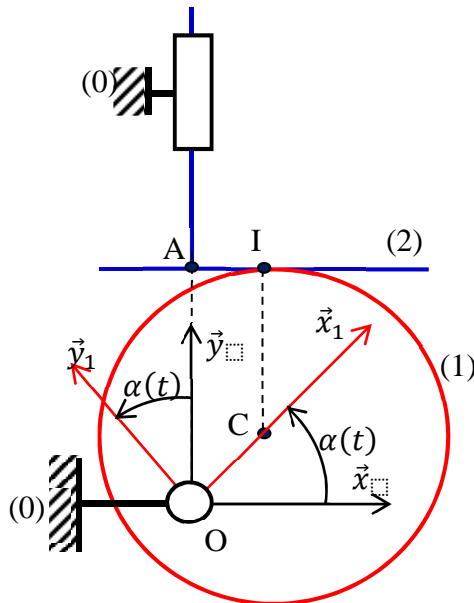
La figure ci-dessus montre l'existence de trois points en contact à l'instant  $t$ . à l'instant  $t+dt$ , un autre point I appartenant à S2 vient se mettre en contact avec un autre point I appartenant à S1 en une nouvelle position géométrique repérée par un autre point géométrique I.

**Remarque :**

Il est à noter que :

- ✓  $\vec{V}(I, S2/R) \neq \vec{V}(I/R)$
- ✓  $\vec{V}(I, S1/R) \neq \vec{V}(I/R)$
- ✓  $T(I, S2/R) \neq T(I/R)$
- ✓  $T(I, S1/R) \neq T(I/R)$

**Exemple :**



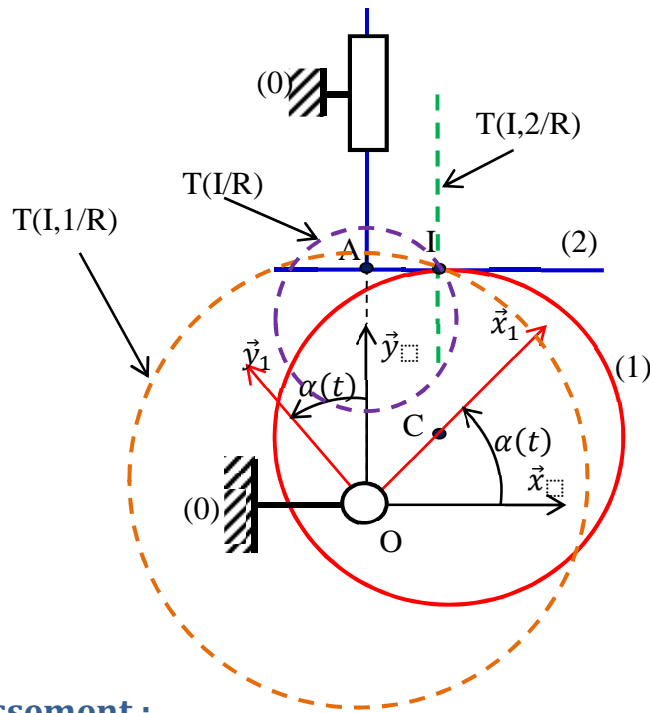
On donne :  $OC = e, CI = R$  et  $OA = y(t)$   
 Déterminer:

- ✓  $\vec{V}(I, 2/R), T(I, 2/R)$
- ✓  $\vec{V}(I, 1/R), T(I, 1/R)$
- ✓  $\vec{V}(I/R), T(I/R)$

- ✓  $\vec{V}(I, 2/R) = \vec{V}(A, 2/R) = \left[ \frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_R = \dot{y} \vec{y}_0$
- ✓ Le solide (2) est animé d'une translation suivant  $(O, \vec{y}_0)$ . La trajectoire du point I appartenant au solide (2) par rapport à R,  $T(I, 2/R)$  est donc un segment passant par le point I et porté suivant  $\vec{y}_0$ .
- ✓  $\vec{V}(I, 1/R) = \vec{V}(O, 1/R) + \vec{\Omega}(1/R) \wedge \vec{OI} = \dot{\alpha}(t) \vec{z}_0 \wedge (e\vec{x}_1 + R\vec{y}_0) = e\dot{\alpha}(t)\vec{y}_1 - R\dot{\alpha}(t)\vec{x}_0$
- ✓ Le solide (1) est animé d'une rotation autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ . La trajectoire  $T(I, 1/R)$  est donc un cercle de centre O et de rayon OI.
- ✓  $\vec{V}(I/R) = \left[ \frac{d\vec{OI}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(e\vec{x}_1 + R\vec{y}_0)}{dt} \right]_R = e\dot{\alpha}(t)\vec{y}_1$
- ✓ Pour déterminer la trajectoire du point géométrique nous procédons comme suit :
  - ✓  $\begin{cases} Vx = -e\dot{\alpha} \sin \alpha(t) \\ Vy = e\dot{\alpha} \cos \alpha(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = e \cos \alpha(t) + x_0 \\ y = e \sin \alpha(t) + y_0 \end{cases}$
  - ✓ Pour  $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\begin{cases} x = 0 = x_0 \\ y = R + e = e + y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = e \cos \alpha(t) \\ y = e \sin \alpha(t) + R \end{cases}$

L'équation de la trajectoire est donc donnée par l'équation suivante :  $x^2 + (y - R)^2 = e^2$ , C'est l'équation d'un cercle de centre K(0,R) et de rayon e.

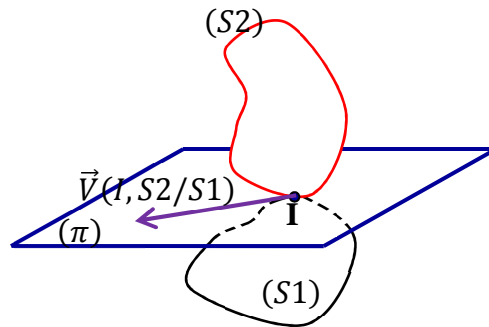




### 3. Vitesse de glissement :

#### 3.1. Définition :

Le vecteur vitesse de glissement au point I de S2 par rapport à S1 est le vecteur vitesse  $\vec{V}(I, S2/S1)$ . Le vecteur vitesse de glissement appartient au plan  $(\pi)$  tangent aux deux solides.



#### 3.2. Condition cinématique de roulement sans glissement CRSG :

La condition de roulement sans glissement au point I de S2 par rapport à S1 est donnée par :

$$\vec{V}(I, S2/S1) = \vec{0}.$$

#### 3.3. Méthode pratique de calcul du vecteur vitesse de glissement :

La méthode de composition des vecteurs vitesses est la plus utilisée afin de déterminer le vecteur vitesse de glissement.

##### ➤ Méthode de composition :

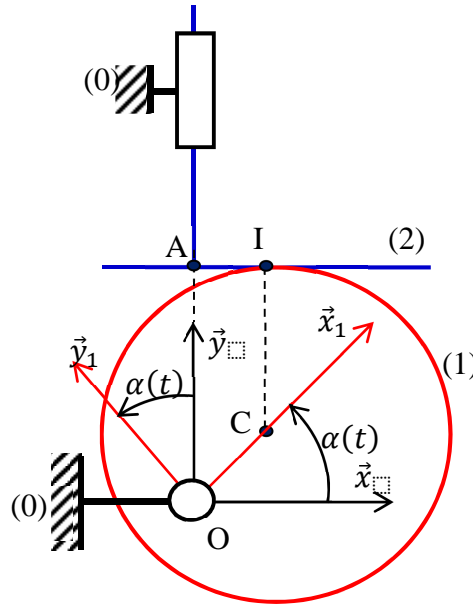
$$\vec{V}(I, S2/S1) = \vec{V}(I, S2/R) - \vec{V}(I, S1/R)$$



## Exercices :

### Exercice 1 : Mécanisme de transformation de mouvement

On considère le système « mécanisme de transformation de mouvement » composé d'un disque (1) de rayon R articulé avec le bâti (0) au point O excentré de e par rapport au centre C. Le disque (1) est en contact supposé ponctuel avec le plateau coulissant (2). Le plateau (2) est en liaison glissière avec le bâti (0). OC=e, CI=R et OA=y(t)



Déterminer:

- ✓  $\vec{V}(I, 2/0)$
- ✓  $\vec{V}(I, 1/0)$
- ✓  $\vec{V}(I/0)$

Déterminer :

- ✓  $T(I, 2/0)$
- ✓  $T(I, 1/0)$
- ✓  $T(I/0)$

Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de (2) par rapport à (1).

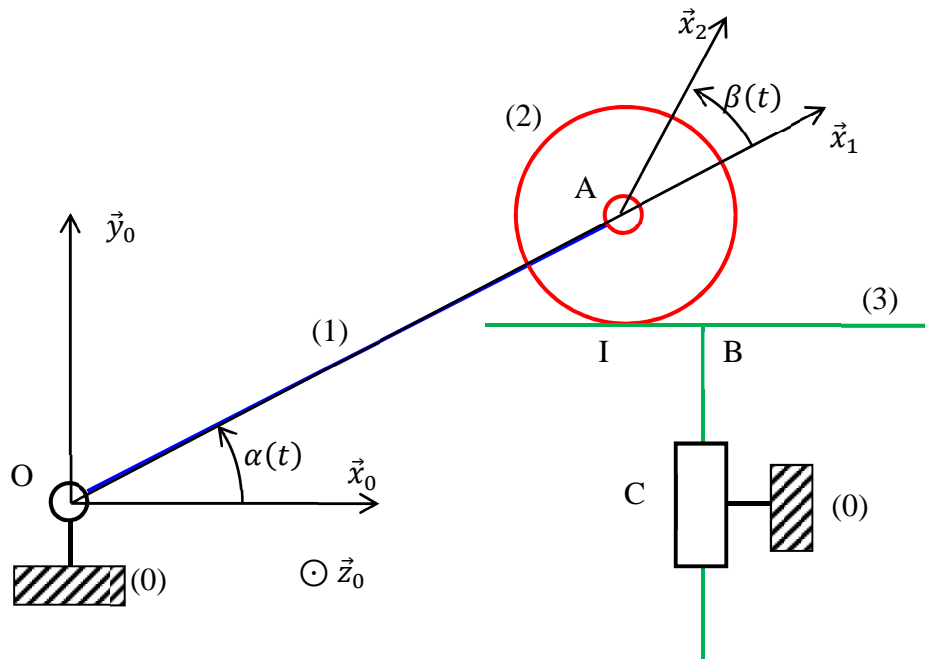
### Exercice 2 : Mécanisme d'ouverture d'une trappe

L'exercice porte sur l'étude d'un mécanisme de désenfumage d'une trappe. Ce mécanisme est composé de :

- Un bâti (0) lié au repère  $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- Un bras (1), en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0), lié au repère  $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  tel que  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- Une roulette (2), assimilée à un disque de rayon R et de centre A, en liaison picot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bras (1) et lié au repère  $R_2(0, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  tel que  $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$
- Un plateau (3), en liaison glissière d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  avec le bat (0) et en liaison ponctuelle de normale  $(I, \vec{y}_0)$  au point de contact I avec la roulette (2). Le contact au point I est maintenu avec un ressort non représenté.

On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$





1. Déterminer  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(3/0)$
2. Déterminer  $\vec{\Omega}(2/3)$ . Déduire le vecteur vitesse de roulement  $\vec{\Omega}_r(2/3)$  et le vecteur vitesse de pivotement  $\vec{\Omega}_p(2/3)$ .
3. Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la roulette 2 par rapport au plateau 3.
4. Déterminer la condition de roulement sans glissement au point I.

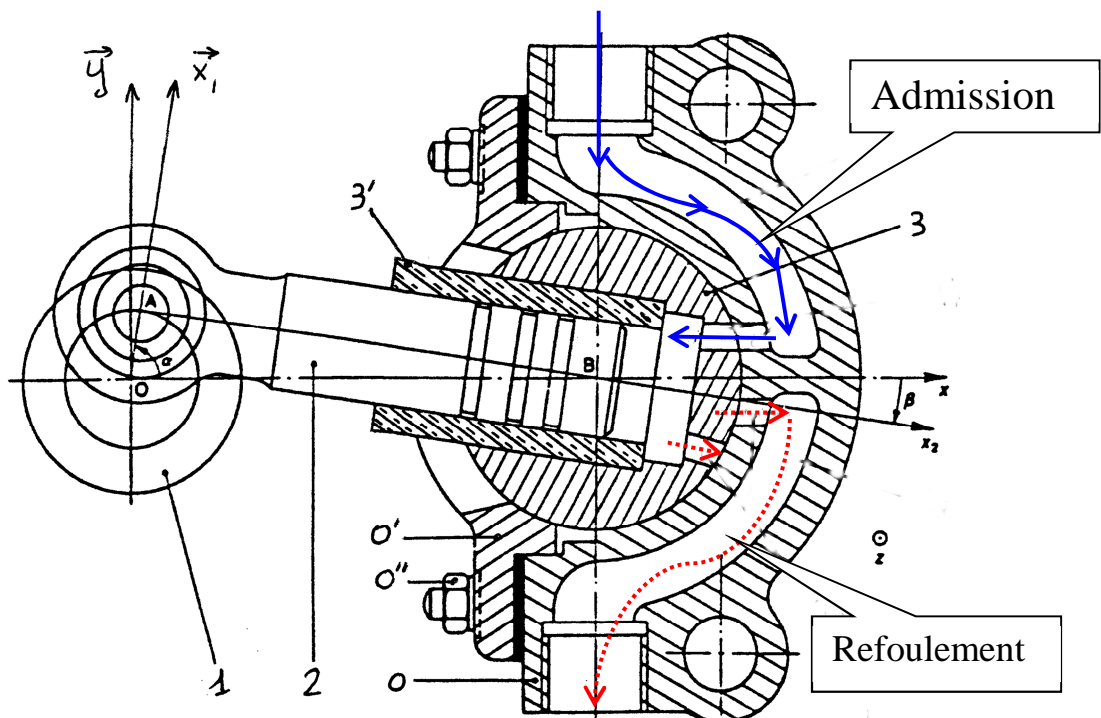


# Sujets de synthèse

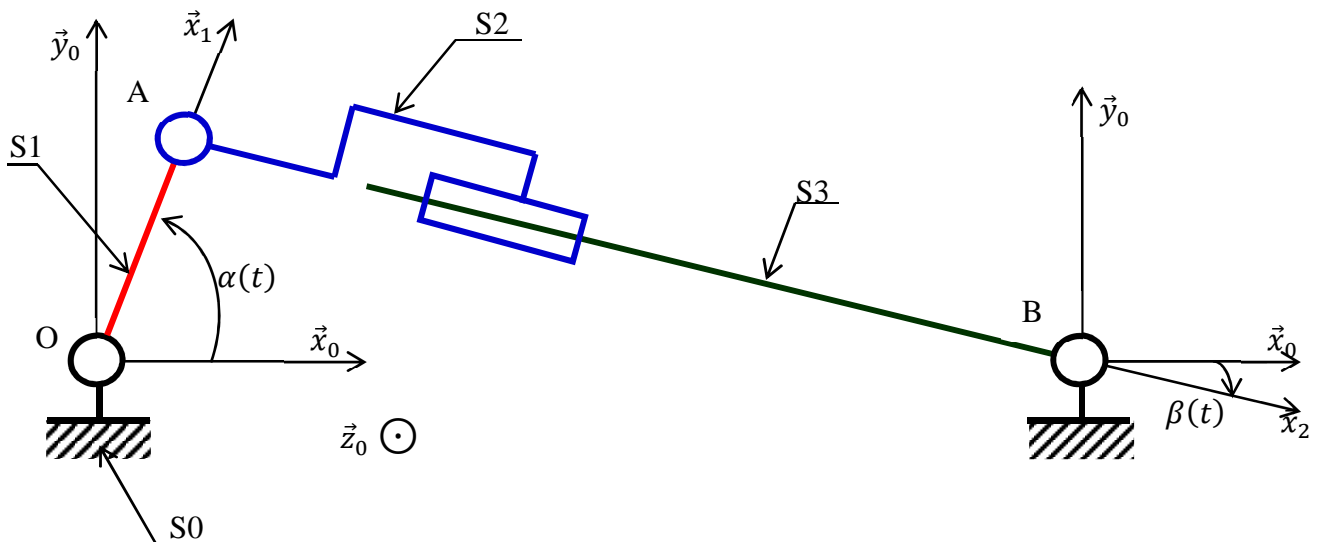
## Sujet 1 :

### Exercice 1 : Pompe.

Le dessin suivant représente la vue en coupe à l'échelle 1 d'une pompe en phase d'admission d'un fluide liquide. Sur le dessin, le bâti est représenté par plusieurs domaines hachurés (de la même manière) ainsi que par des domaines non hachurés séparant les domaines hachurés et signifiant que le plan de coupe passe par des parties creuses. Comme partie creuse, on retrouve une conduite d'admission du fluide à pomper et une conduite de refoulement du fluide pompé. Solidaire totalement de ce corps on aperçoit un couvercle (0') représenté également par des domaines hachurés (d'un autre type de hachures) et des domaines non hachurés. Ce couvercle (0') est maintenu sur le corps (0) par deux boulons (0'').



Le schéma cinématique de cette pompe est également représenté ci-contre.



Cette pompe est constituée de différents éléments :

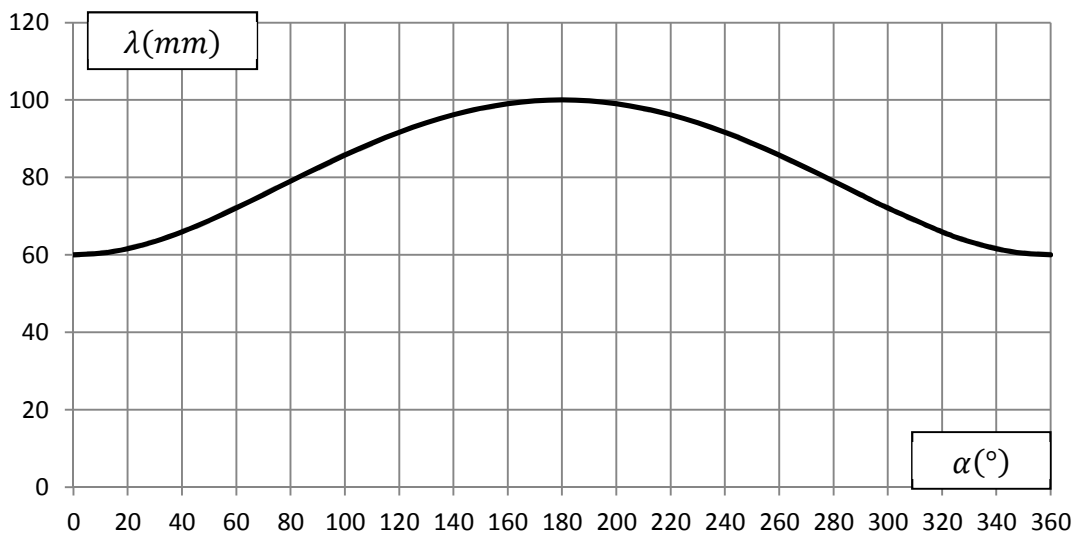
- Un bâti (S0) constitué des éléments (0+0'+0'') auquel on attache un repère de référence  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Un ensemble oscillant (S3) constitué des éléments (3+3') en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec le bâti (S0). On attache à cet ensemble un repère  $R_3(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ .
- Une manivelle (S1) en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (S0). On attache à cette manivelle un repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .
- Un piston (S2) en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec (S1) et en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  avec (S3). On attache à ce piston un repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ .

On notera :

- $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  l'angle de rotation de la manivelle (S1) par rapport au bâti (S0).
- $\beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  l'angle de rotation de (S2) ou (S3) par rapport au bâti (S0).
- $\lambda(t)$  le paramètre de translation de (S2) par rapport à (S3).

On pose :  $\vec{OA} = R\vec{x}_1$ ,  $\vec{OB} = L\vec{x}_0$  et  $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$

La figure ci-dessous représente la loi entrée sortie de la pompe ( $\lambda(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ ) pour  $R=20\text{mm}$  et  $L=80\text{mm}$ .

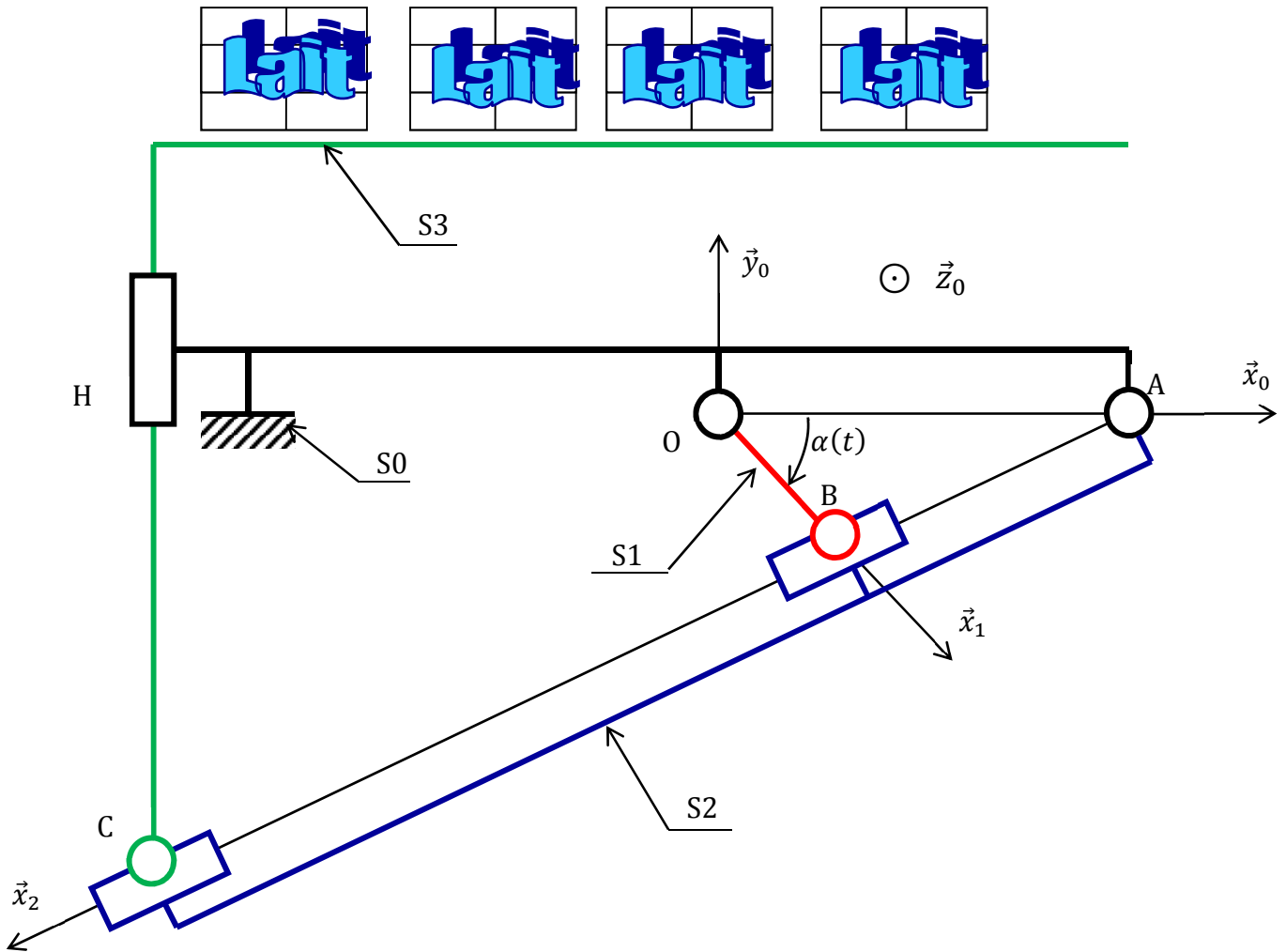


1. Donner le graphe de liaison du mécanisme étudié et préciser les spécifications des différentes liaisons. Indiquer la nature de la chaîne des solides.
2. Donner pour chaque liaison le torseur cinématique et le torseur statique. Indiquer le nombre de degrés de liberté (ddl), le nombre d'inconnue statique (Ns) et le nombre d'inconnues cinématiques (NS).
3. Représenter les figures de changement de base.
4. Indiquer le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie.
5. Ecrire les équations qui découlent de la fermeture géométrique de la chaîne des solides S0-S1-S2-S3.
6. Déduire la loi entrée-sortie de la pompe (exprimer  $\lambda(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ ).
7. Déterminer la course en mm du piston (S2).
8. Préciser par rapport à  $\alpha(t)$  la phase d'aspiration et la phase de refoulement.
9. Sachant que la vitesse de rotation de la manivelle est de 1200tr/min et le diamètre du piston S2 est  $d = 20\text{mm}$ . Déterminer le débit moyen  $Q_m$  de la pompe en litre/min et en litre/s.
10. A votre avis, sur quel paramètre géométrique il faut agir afin d'augmenter le débit moyen  $Q_m$ .

## Exercice 2 : Palettiseur pour l'industrie laitière

Les briques de lait de 1L sont stockées par groupe de 6, et déposée sur des palettes (ce qui facilite leur transport dans les camions). Dans une chaîne de conditionnement de briques de lait, on utilise souvent des poussoirs qui poussent tout un lot de 6 briques de lait. On se propose d'étudier un de ces poussoirs dont on donne le modèle ci-dessous ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. L'objectif d'étude est de vérifier si le système permet d'atteindre l'exigence demandée.

Exigence technique	Critère	Niveau
1.2	Amplitude de déplacement	50cm mini



Le bâti (S0) est fixe. Un motoréducteur anime en rotation la manivelle (S1). Par l'intermédiaire d'une liaison linéaire annulaire d'axe (B,  $\vec{x}_2$ ), la manivelle (S1) déplace la tige (S2) en rotation autour de l'axe (A,  $\vec{z}_0$ ) qui déplace elle même le poussoir (S3) en translation suivant l'axe (H,  $\vec{y}_0$ ).

**Données :**

$$\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1), \beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2), \overline{AB} = \lambda(t)\vec{x}_2, \overline{AC} = d(t)\vec{x}_2, \overline{CH} = y(t)\vec{y}_0, \overline{OB} = R\vec{x}_1, \overline{HA} = L_0\vec{x}_0, \overline{OA} = L_1\vec{x}_0, R=0,15\text{m et } L_0 = 2L_1=0,5\text{m.}$$

1. Donner le graphe de liaisons. Préciser les spécifications nécessaires pour chaque liaison.
2. Représenter les figures de changement de base utiles. Déterminer  $\vec{\Omega}(S1/S0)$  et  $\vec{\Omega}(S2/S0)$ .
3. Déterminer les trajectoires suivantes :

$$T(B \in S_1/S_0), T(B \in S_2/S_0), T(C \in S_2/S_0) \text{ et } T(C \in S_3/S_0)$$

4. Écrire les équations de la fermeture géométrique de la chaîne des solides (S0-S1-S2) en projection dans la base du repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
5. Écrire les équations de la fermeture géométrique de la chaîne des solides (S0-S2-S3) en projection dans la base du repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
6. Déduire la loi entrée-sortie du système :  $y(t) = f(\alpha(t))$ .
7. Déterminer l'amplitude de déplacement du poussoir  $\Delta y = y_{max} - y_{min}$ .
8. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

## Sujet 2 :

Le système faisant l'objet de cette étude est une chaîne de fabrication industrielle. Elle sert à produire des boîtes cylindriques, en tôle spéciale mince, destinées à l'emballage des conserves (confitures, tomates, thon, etc....). Cette chaîne est composée principalement de trois unités qui concernent respectivement la préparation des fonds et des flancs des boîtes et leur assemblage (figure 1). Les deux premières unités fonctionnent en parallèle et fournissent la matière d'œuvre à la troisième (figure 2).

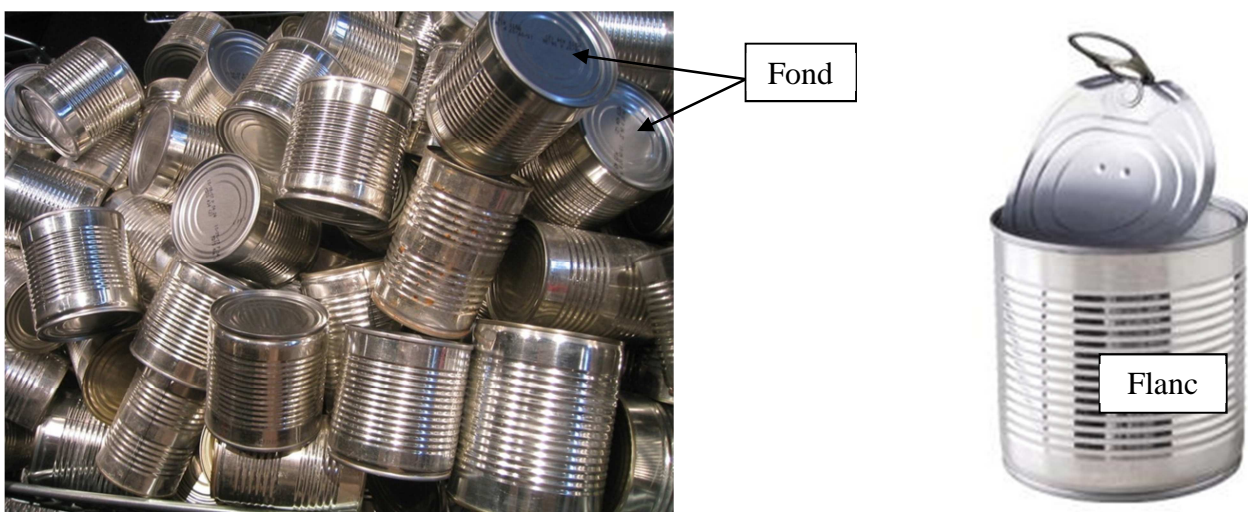


Figure 1 : Boîtes de conserve

Le diagramme suivant résume les différentes étapes de production :

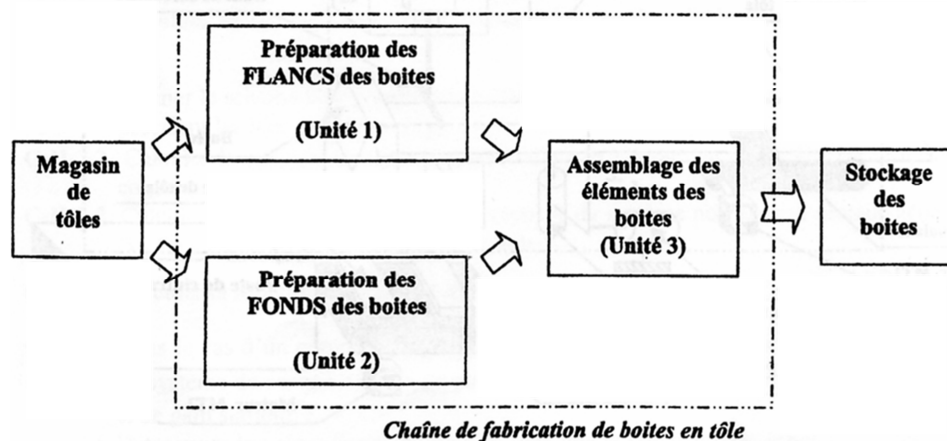


Figure 2: Chaîne de fabrication de boîtes de conserve

Les plaques de tôles initialement préparées sont déplacées vers le poste de découpage par l'intermédiaire d'un tapis roulant entraîné par un moteur **MT1** (figure 3). L'action simultanée de deux vérins **C2** et **C3** sur la tôle, assure son maintien en position sous le mécanisme de découpage. Une fois la bande découpée, elle tombe sur un deuxième tapis roulant pour l'amener au deuxième poste de cintrage.

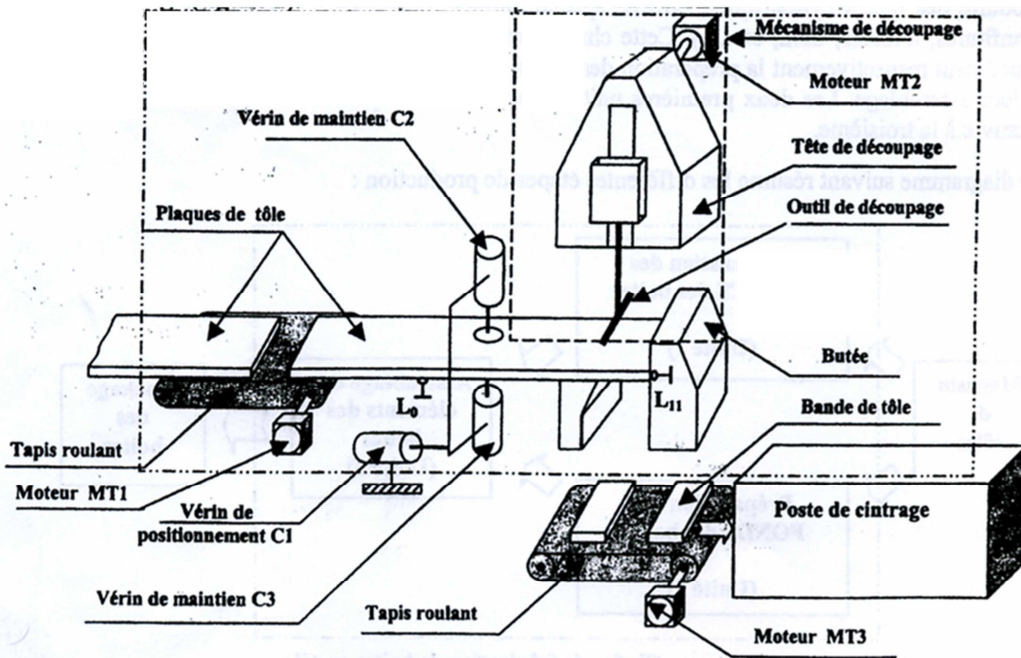


Figure 3: Poste de découpage

Le schéma cinématique spatial du mécanisme de découpe de tôles est donné par la figure suivante.

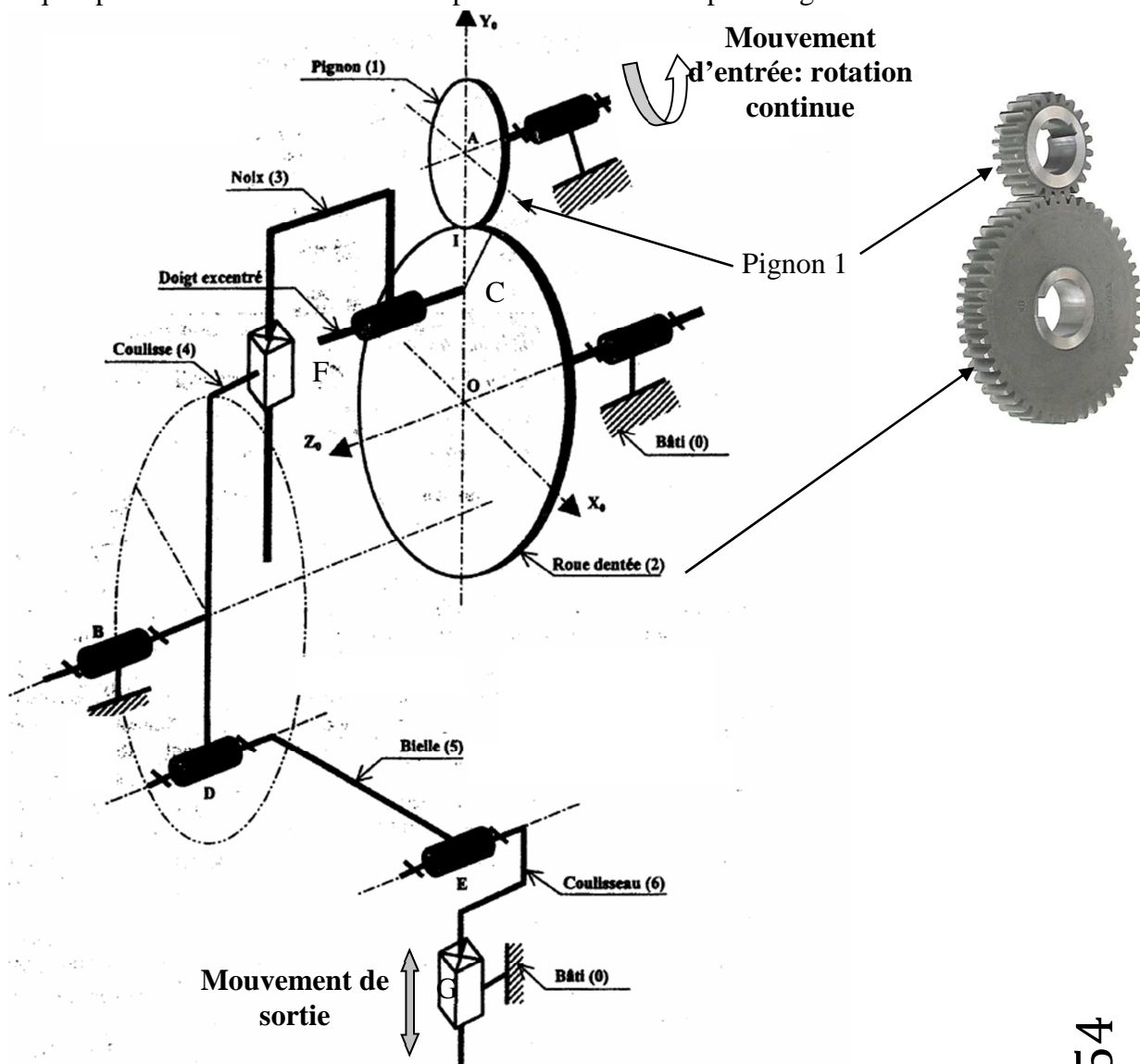
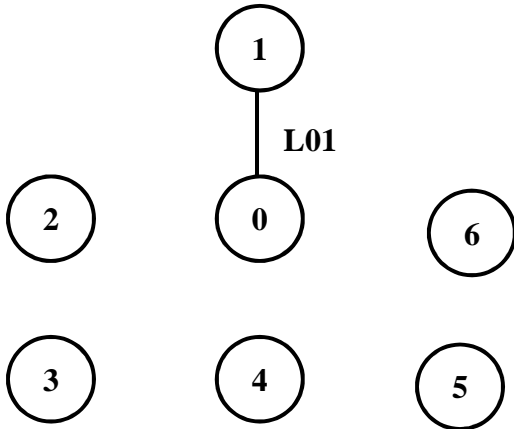


Figure 4: schéma cinématique du mécanisme de découpe

**Questions:**

1. Compléter le graphe des liaisons suivant.



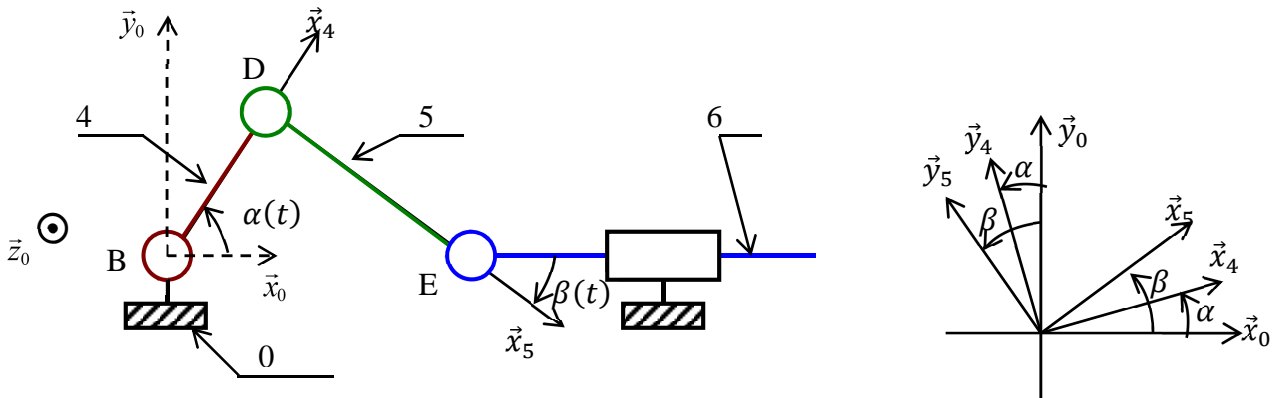
L01:.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Compléter avec les informations nécessaires le tableau suivant.

Liaison	Représentation spatiale	Représentation plane		Torseur statique
		Plan 1	Plan 2	
Pivot d'axe (O, $\vec{Z}_0$ )				$\{F(1 \rightarrow 2)\} \dots$ $= \left\{ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right\} \dots$
Ponctuelle de normale (I, $\vec{Y}_0$ )				$\{F(1 \rightarrow 2)\} \dots$ $= \left\{ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right\} \dots$
Glissière d'axe (E, $\vec{Y}_0$ )				$\{F(1 \rightarrow 2)\} \dots$ $= \left\{ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right\} \dots$
Pivot glissant d'axe (O, $\vec{Z}_0$ )				$\{F(1 \rightarrow 2)\} \dots$ $= \left\{ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right\} \dots$

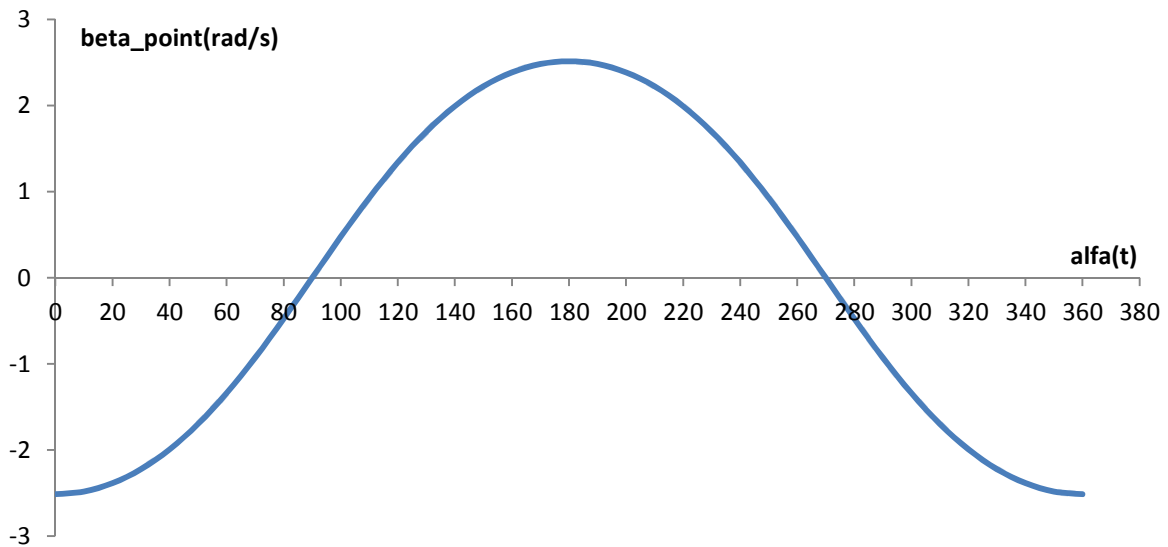


La chaîne formée par les solides (0-4-5-6) est modélisée par le schéma cinématique plan suivant :



On donne :  $\vec{OB} = \lambda(t) \vec{x}_0$ ,  $OA = R$ ,  $AB = d$ ,  $R=40\text{mm}$ ,  $d=100\text{mm}$

1. Déterminer les vitesses angulaires suivantes :  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/1)$  et  $\vec{\Omega}(3/0)$
2. Déterminer les vecteurs vitesses suivants :
  - $\vec{V}(A \in S_1/S_0)$
  - $\vec{V}(B \in S_2/S_1)$
  - $\vec{V}(B \in S_1/S_0)$
3. Déduire, par calcul direct (dérivation) et/ou par composition de mouvement et/ou par champ de vecteurs vitesses, deux expressions différentes pour  $\vec{V}(B \in S_2/S_0)$ .
4. Déduire deux équations scalaires à partir de la question précédente.
5. Ecrire les équations qui découlent de la fermeture géométrique de la chaîne des solides  $S_0-S_1-S_2-S_3$ .
6. Exprimer la vitesse angulaire  $\dot{\beta}(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ ,  $\dot{\alpha}(t)$  et les paramètres géométriques.
7. On admet que la vitesse de rotation de la manivelle est constante est égale à  $\dot{\alpha}(t) = 2\pi\text{rad/s}$ . la courbe suivante représente l'allure de la vitesse angulaire  $\dot{\beta}(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ . Interpréter vis-à-vis le signe de  $\dot{\beta}(t)$  et le sens de  $\vec{\Omega}(2/0)$ .





### Sujet 3 :

La figure 1 schématise le principe d'un hayon sur parallélogramme déformable. Ce système de manutention est constitué de deux vérins qui permettent l'ouverture, l'inclinaison et la fermeture du plateau. Il s'adapte à l'arrière du véhicule et est solidaire au châssis. Un tel mécanisme ne permet l'élévation ou l'abaissement de charges qu'entre le sol et le plancher du véhicule.

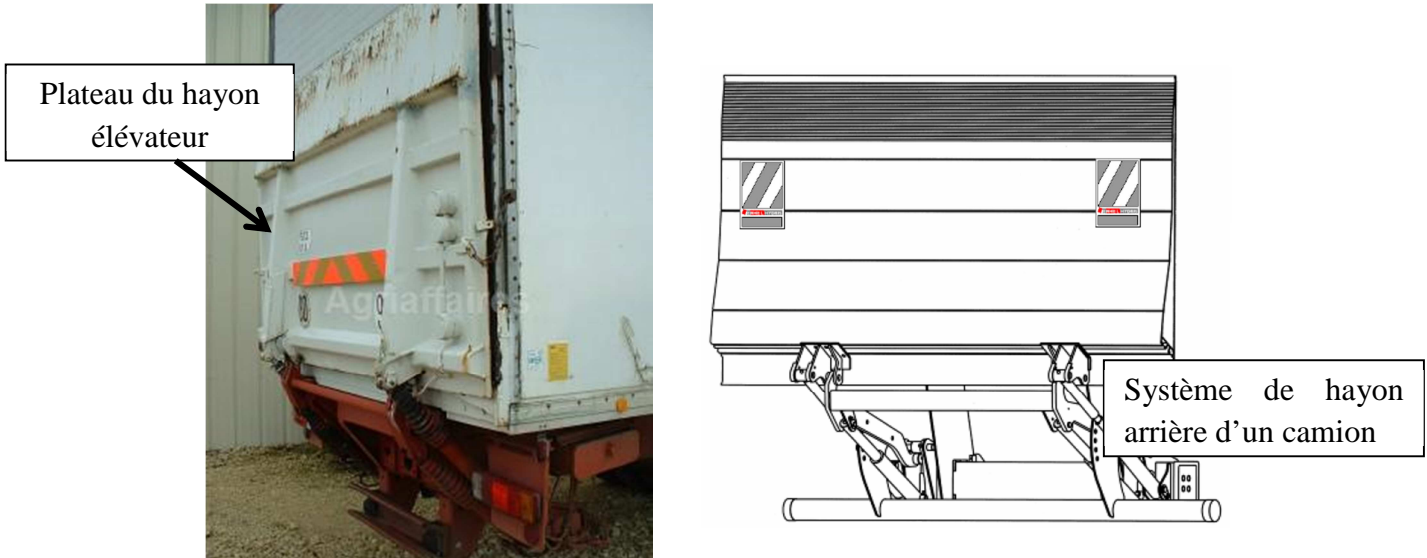


Figure 1 : Schéma d'architecture du hayon arrière d'un camion

On distingue deux phases de fonctionnement du mécanisme du hayon : une phase de travail (déplacement du plateau du niveau plancher du camion au niveau sol) et une phase de fermeture ou ouverture du plateau.

Dans la phase de travail, on a seulement le vérin (1+2) qui agit sur le bras 3 pour assurer la montée ou la descente du plateau. Lors de cette phase, le plateau est maintenu horizontal soit donc  $\bar{x}_0 = \bar{x}_6$  et  $\bar{y}_0 = \bar{y}_6$  et  $\overline{CD} = \overline{EH}$  (figure 2).

Dans la phase d'ouverture ou de fermeture du plateau, on a seulement le vérin (4+5) qui agit sur le plateau 6 (figure 3).

#### Repères et paramétrage pour la phase de travail :

Le mécanisme du hayon représenté par la figure 3 est composé de :

- Un bâti 0 lié au repère  $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  supposé galiléen ;
- Un corps du vérin 1 auquel est lié au repère  $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(O, \bar{z}_0)$  avec le bâti 0. on note  $\alpha = (\bar{x}_0, \bar{x}_1) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$  et  $\overline{OA} = a\bar{x}_1$  où  $a$  est une constante positive ;
- Une tige du vérin 2 à laquelle est lié le repère  $R_2(B, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)$ . Elle est en liaison supposée glissière d'axe  $(O, \bar{x}_1)$  avec le corps du vérin 1. on donne  $\overline{AB} = \lambda\bar{x}_1$  avec  $\lambda$  est un paramètre variable en fonction du temps ;
- Un bras 3 auquel est lié le repère  $R_3(C, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_0)$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(C, \bar{z}_0)$  avec le bâti 0 et en liaison pivot d'axe  $(B, \bar{z}_0)$  avec la tige du vérin 2. on note  $\beta = (\bar{x}_0, \bar{x}_3) = (\bar{y}_0, \bar{y}_3)$ ,  $\overline{CB} = b\bar{y}_3$ ,  $\overline{OC} = \ell\bar{x}_0$  et  $\overline{CD} = c\bar{x}_3$ .  $b$ ,  $c$  et  $\ell$  sont des constantes positives.
- Un corps du vérin 4 auquel est lié au repère  $R_4(E, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_0)$ . Il est en liaison pivot d'axe  $(E, \bar{z}_0)$  avec le bâti 0. on note  $\theta = (\bar{x}_0, \bar{x}_4) = (\bar{y}_0, \bar{y}_4)$  et  $\overline{EF} = d\bar{x}_4$  où  $d$  est une constante positive ;

- Une tige du vérin 5 à laquelle est lié le repère  $R_5(H, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_0)$ . Elle est en liaison supposée glissière d'axe  $(E, \bar{x}_4)$  avec le corps du vérin 4. On donne  $\overline{FH} = \mu \bar{x}_4$  avec  $\mu$  est un paramètre variable en fonction du temps ;
- Un plateau 6 auquel est lié le repère  $R_6(D, \bar{x}_6, \bar{y}_6, \bar{z}_0)$ . On rappelle que pour cette phase,  $\bar{x}_0 = \bar{x}_6$  et  $\bar{y}_0 = \bar{y}_6$  et  $\overline{CD} = \overline{EH} = c \bar{x}_3$ . Le plateau 6 est en liaison pivot d'axe  $(D, \bar{z}_0)$  avec le bras 3 et en liaison pivot d'axe  $(H, \bar{z}_0)$  avec la tige du vérin 5.

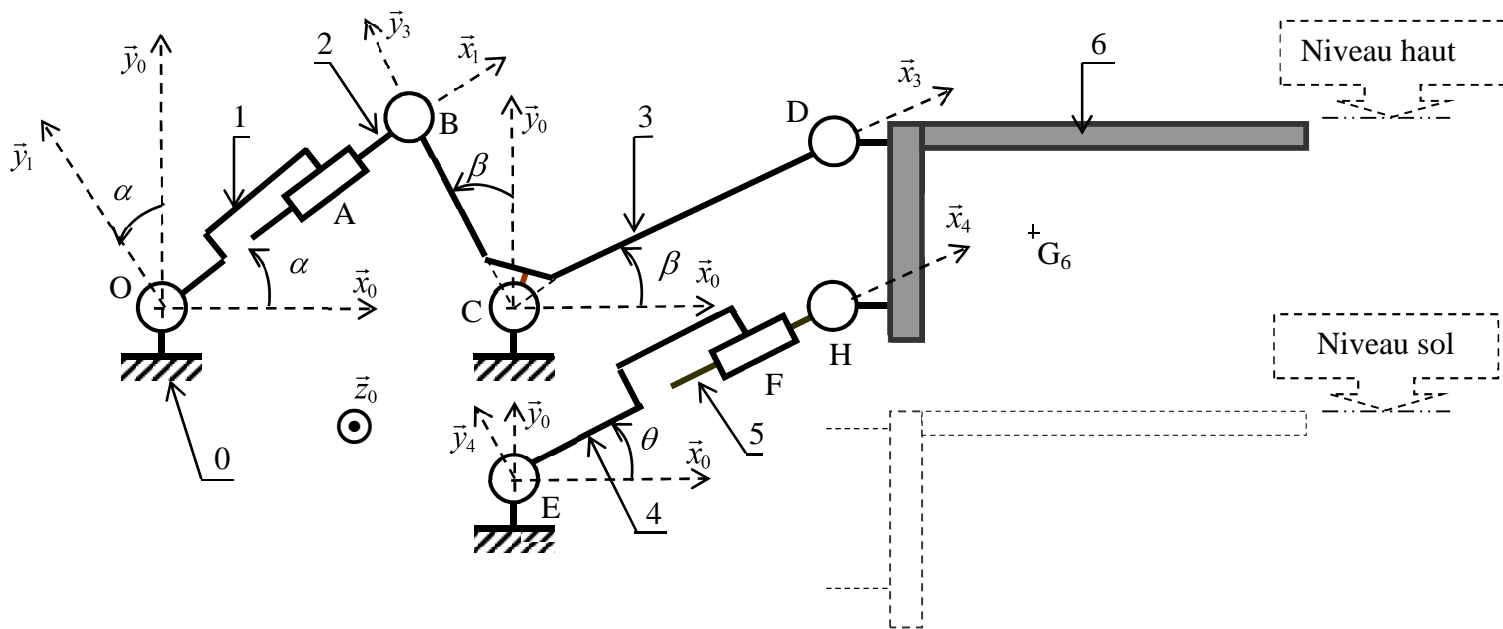
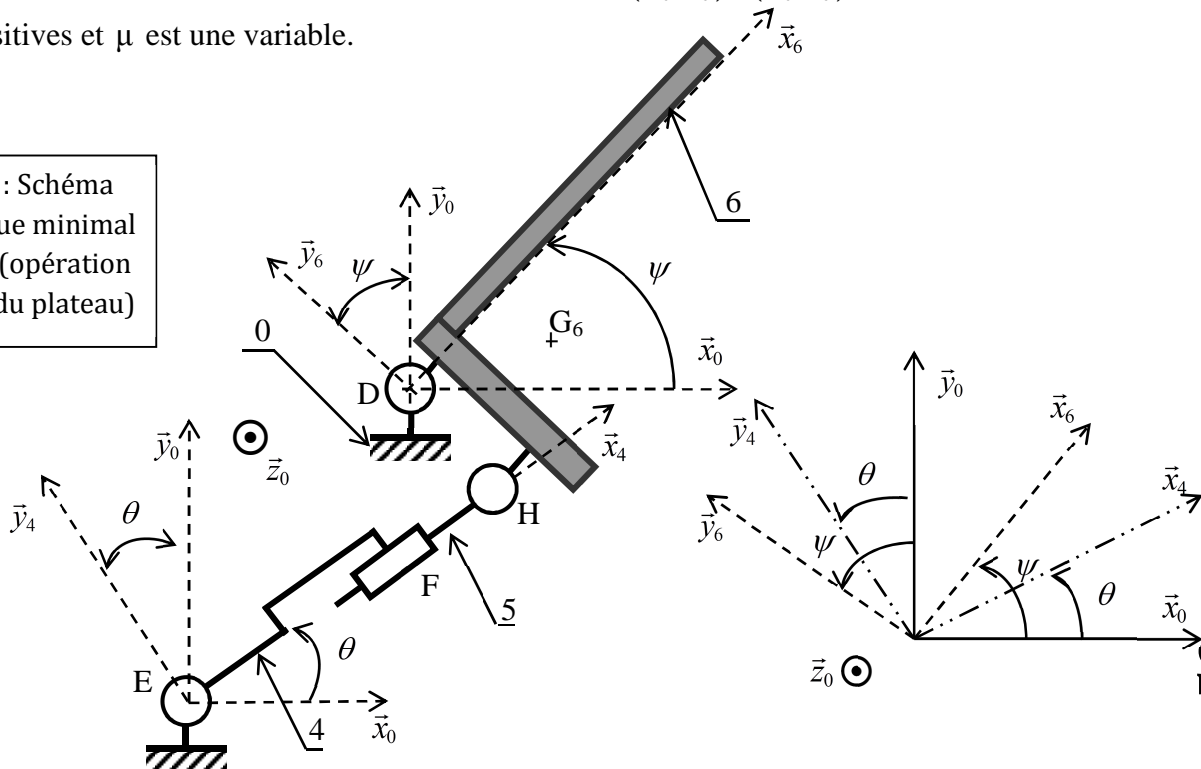


Figure 2 : Schéma cinématique du hayon (phase de travail)

### Repères et paramétrage pour la phase d'ouverture et de fermeture du plateau 6 :

Lors de l'opération d'ouverture ou de fermeture du plateau, le centre de l'articulation D entre le plateau 6 et le bras 3 reste un point fixe dans le bâti. Pour cela on adopte le modèle cinématique simplifié suivant. On donne  $\overline{ED} = e \bar{x}_0 + f \bar{y}_0$ ,  $\overline{HD} = h \bar{y}_6$ ,  $\overline{FH} = \mu \bar{x}_4$ ,  $\overline{EF} = d \bar{x}_4$  et  $\psi = (\bar{x}_0, \bar{x}_6) = (\bar{y}_0, \bar{y}_6)$  avec : e, f, h, d sont des constantes positives et  $\mu$  est une variable.

Figure 3 : Schéma cinématique minimal du hayon (opération du pliage du plateau)



### A- Loi entrée-sortie (phase de travail) :

En se basant sur le modèle cinématique de la figure 2. On demande de :

- A-1. Ecrire les équations qui découlent de la fermeture géométrique de la chaîne O-B-C-O.
- A-2. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $\lambda$ , en déduire  $\theta$  en fonction de  $\lambda$ .
- A-3. Déduire la nature du mouvement du plateau lors de cette phase.

### B- Loi entrée-sortie (opération de fermeture et d'ouverture du plateau) :

En se basant sur le modèle cinématique de la figure 3. On demande de :

- B-1. Ecrire les équations qui découlent de la fermeture géométrique de la chaîne E-H-D-E.
- B-2. Montrer que la loi entrée-sortie (position angulaire du plateau  $\psi$  en fonction de déplacement linéaire du vérin  $\mu$ ) est donnée par l'équation suivante :

$$\psi = \arcsin\left(\frac{2hf}{\sqrt{4h^2e^2 + 4h^2f^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{(\mu+d)^2 - (e^2 + f^2 + h^2)}{\sqrt{4h^2e^2 + 4h^2f^2}}\right)$$

### C Etude cinématique : opération de la fermeture du plateau 6

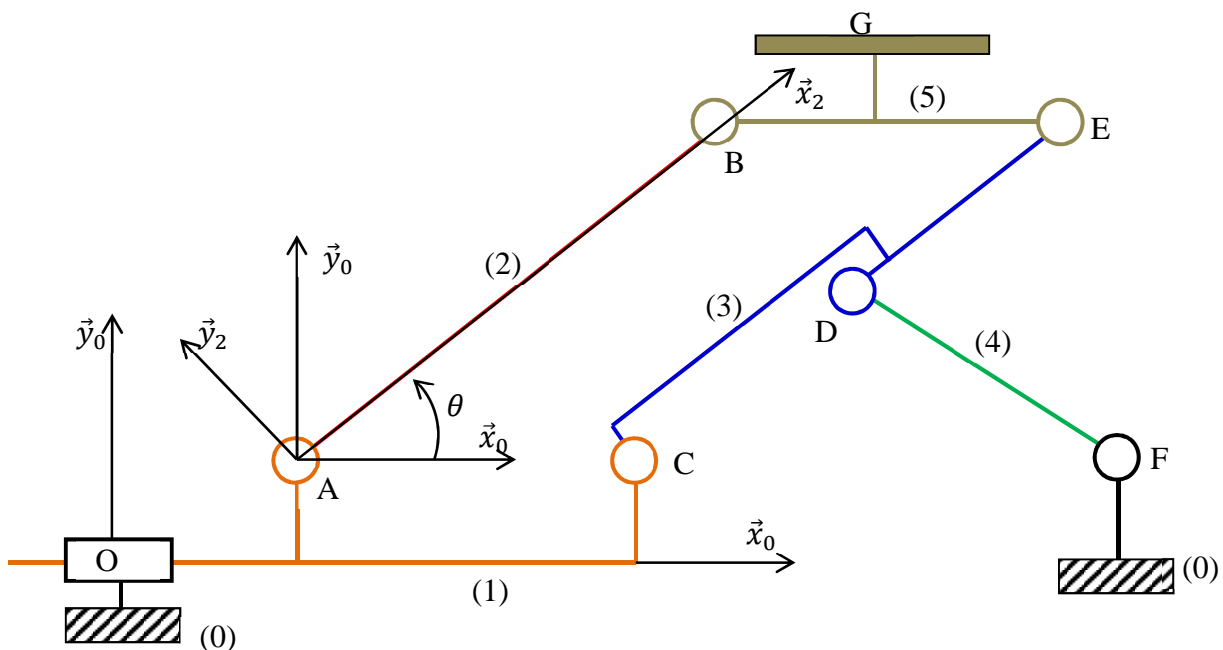
- C-1. Exprimer dans la base de  $R_6$  la vitesse du centre d'inertie  $G_6$  du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .  $\vec{V}(G_6 \in 6/R_0)$  sachant que  $\overline{DG_6} = x_G \vec{x}_6 + y_G \vec{y}_6$ .
- C-2. Exprimer dans la base de  $R_6$  l'accélération du centre d'inertie  $G_6$  du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .  $\vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0)$

### Sujet 4 :

#### Exercice 1 : Mécanisme élévateur

La figure suivante représente le schéma cinématique minimal d'un mécanisme élévateur. Le solide (1) est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  avec le bâti (0). Toutes les autres liaisons sont des liaisons pivot d'axe  $\vec{z}_0$ .

On donne :  $AB=CE=2L$ ,  $AC=BE=a$ ,  $CD=DF=DE=L$ ,  $\overline{OA} = \lambda(t)\vec{x}_0 + b\vec{y}_0$



1. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (1) par rapport au bâti (0), au point O.
2. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (2) par rapport à (1), au point A.
3. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (5) par rapport à (2), au point B.
4. Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (5) par rapport au bâti (0), au point B.
5. Déterminer la norme du vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 5/0)$  en fonction de  $\dot{\lambda}$  et  $\theta$
6. Quelle est la nature de mouvement de (5) par rapport au bâti (0).

**Exercice 2 : Centre d'usinage 5 axes (extrait du concours ATS GM 2006)**

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produits dans les industries mécaniques. On appelle le moyen de production associé à une opération d'usinage une machine outil ou un centre d'usinage. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante.

Les différentes formes de pièces sont obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce.

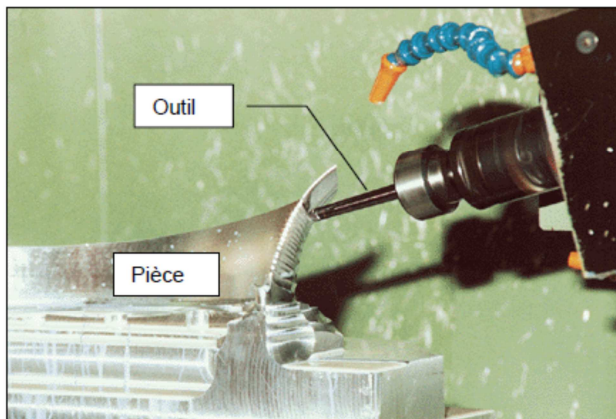


Figure 1 : Opération d'usinage de forme complexe



Figure 2 : Exemple de pièce de forme complexe

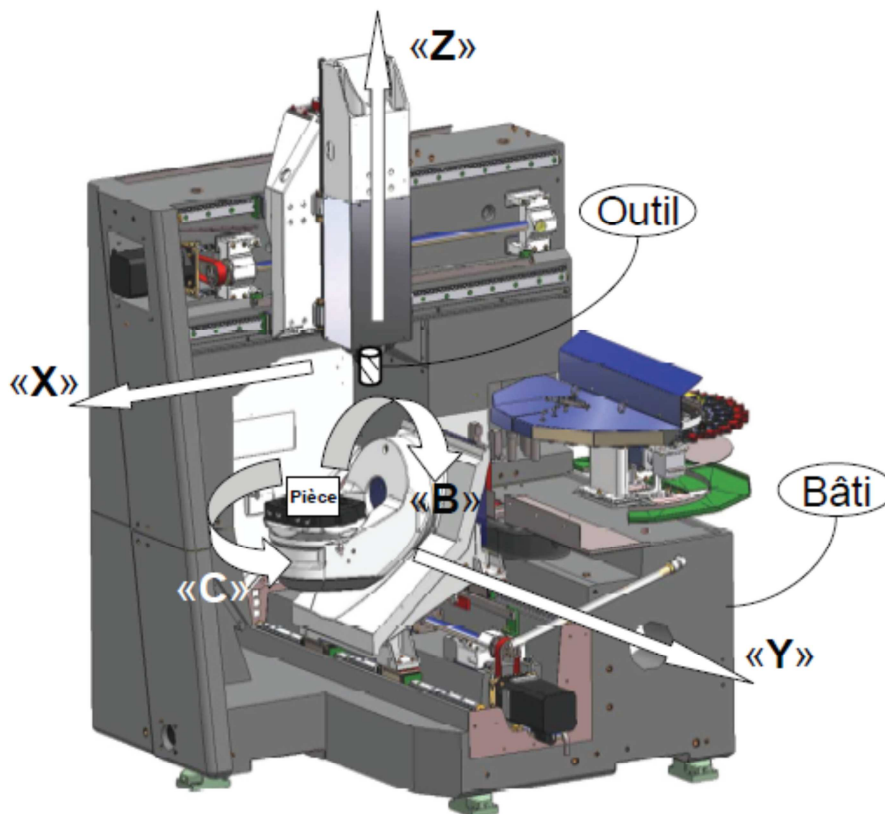


Figure 3 : Vue globale du centre d'usinage avec repérage des « axes »

La figure 3 est un exemple de machine possédant 3 translations (X, Y et Z) et deux rotations (B et C). Une telle machine est appelée machine 5 axes (un axe est un ensemble qui gère un des mouvements élémentaire, translation ou rotation).

Sur cette machine, 2 axes sont utilisés pour mettre en mouvement l'outil par rapport au bâti (ce sont les translations Y et Z) et 3 axes sont utilisés pour mettre en mouvement la pièce par rapport au bâti (ce sont la translation X et les deux rotations B et C).

L'objectif de cette partie est d'exprimer la vitesse de l'extrémité de l'outil par rapport à la pièce en fonction du paramétrage proposé.

**Performances des axes « X », « Y » et « Z » du centre d'usinage.**

	Variables	Course	Vitesse maximale	Couple moteur
Axe « X » (longitudinal)	$x(t)$	800 mm	40 m/min	42 Nm
Axe « Y » (transversal)	$y(t)$	600 mm	40 m/min	Non communiqué
Axe « Z » (vertical)	$z(t)$	500 mm	40 m/min	Non communiqué

**Performances des axes « B » et « C » du centre d'usinage.**

	Variables	Course	Vitesse maximale	Accélération angulaire	Couple moteur
Axe « B »	$\theta_1(t)$	+ 30° / - 110°	150 tours/min	50 rd/s <sup>2</sup>	680 Nm
Axe « C »	$\theta_0(t)$	360°	250 tours/min	100 rd/s <sup>2</sup>	340 Nm

La chaîne cinématique pour déplacer l'outil par rapport au bâti est fournie sur la figure suivante.

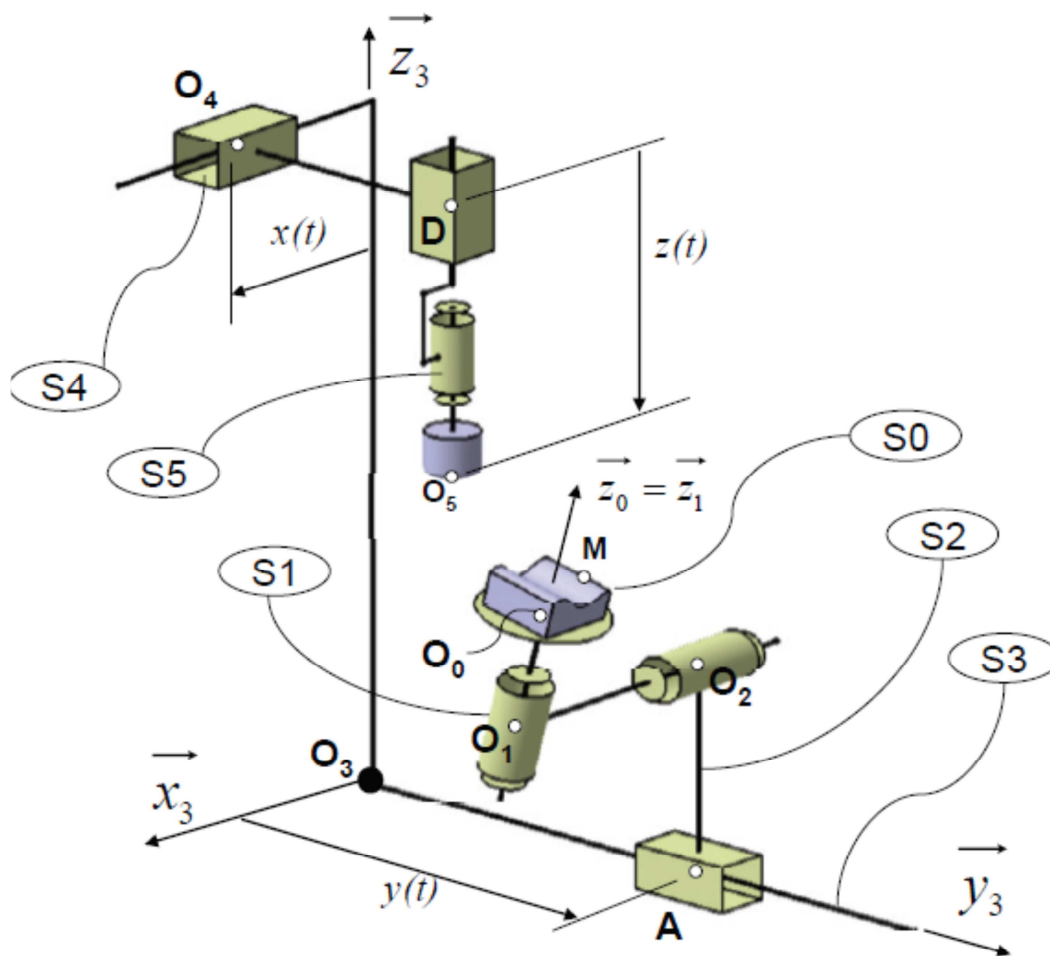
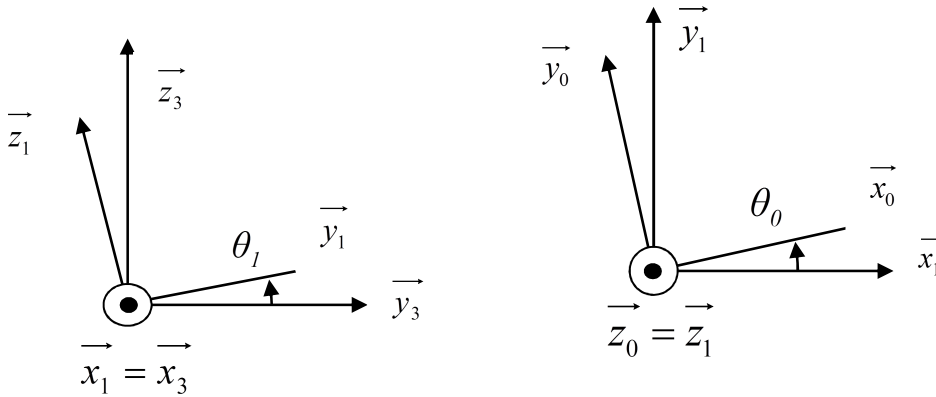


Figure 4 : schéma cinématique



$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_3O_4} &= x(t) \cdot \overrightarrow{x_3} + l_3 \cdot \overrightarrow{z_3} & \overrightarrow{AO_2} &= l_2 \cdot \overrightarrow{z_3} & \overrightarrow{O_4D} &= l_4 \cdot \overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{O_3A} &= y(t) \cdot \overrightarrow{y_3} & \overrightarrow{O_2O_1} &= l_1 \cdot \overrightarrow{x_3} & & \\ \overrightarrow{DO_5} &= z(t) \cdot \overrightarrow{z_3} & \overrightarrow{O_1O_0} &= l_0 \cdot \overrightarrow{z_0} & & \end{aligned}$$

Où  $l_0, l_1, l_2, l_3$  et  $l_4$  sont des constantes liées à l'architecture de la machine.



1. Exprimer  $\overrightarrow{O_3O_5}$  dans la base du référentiel R3.
2. Définir et caractériser le lieu géométrique du point O5 (extrémité de l'outil) dans son mouvement par rapport au repère R3, lorsque l'on commande les axes « X » et « Z ».
3. Donner l'expression, dans la base du référentiel R3, de la vitesse du point O5 lié au solide 5, dans son mouvement par rapport à R3, en fonction de  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$ . Cette vitesse sera notée :  $\vec{V}(O5 \in S5/R3)$
4. Calculer la valeur maximale de la norme du vecteur vitesse du point O5, lié au solide 5, dans son mouvement par rapport à R3.
5. Exprimer  $\overrightarrow{O_3O_0}$  dans la base du référentiel R3.
6. Donner l'expression, dans la base du référentiel R3, de la vitesse du point  $O_0$ , lié à S0, dans son mouvement par rapport à R3. Cette vitesse sera notée :  $\vec{V}(O_0 \in S0/R3)$
7. Exprimer le vecteur rotation de S0 par rapport à S3, noté  $\overrightarrow{\Omega}_{(S0/R3)}$ , dans la base du référentiel R1 en fonction de  $\dot{\theta}_0$  et de  $\dot{\theta}_1$ .

La surface usinée est définie comme un ensemble de points M de coordonnées  $(x_M, y_M, z_M)$  dans le repère R0.

On notera  $\overrightarrow{V}_{M \in S0/R3}$  le vecteur vitesse du point M lié à S0, dans son mouvement par rapport à R3.

8. Donner la relation entre les vecteurs  $\overrightarrow{V}_{M \in S0/R3}$ ,  $\overrightarrow{V}_{O_0 \in S0/R3}$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{(S0/R3)}$ .
9. Etablir la relation vectorielle donnant la vitesse de  $O_5$  appartenant à S5 dans son mouvement par rapport à S0, notée  $\overrightarrow{V}_{O_5 \in S5/R0}$ , en fonction notamment des vecteurs précédemment déterminés :
 
$$\overrightarrow{V}_{O_5 \in S5/R3}, \overrightarrow{V}_{M \in S0/R3} \text{ et } \overrightarrow{\Omega}_{(S0/R3)}.$$
10. Le point  $O_5$  doit se déplacer sur la surface usinée définie comme le lieu des points M. Que devient alors cette relation ?

# Statique des solides indéformables



# Modélisation des actions mécaniques

---

## I. Introduction :

### I.1. Définition

On appelle une action mécanique tout phénomène physique susceptible de provoquer ou modifier le mouvement d'un corps, ou d'un ensemble de corps.

Cette action permet de :

- Maintenir un corps au repos,
- Déformer un corps,

### I.2. Classification :

On distingue deux grandes familles d'actions mécaniques suivant leur mode d'action :

- **Les actions mécaniques de contact**

Une action mécanique de contact est une action qui s'applique directement sur la surface du solide (action ponctuelle ou surfacique). Cette action se répartit en fonction de la nature du contact entre les deux corps, principalement contact ponctuel et contact surfacique.

- **Les actions mécaniques à distance**

Une action mécanique à distance est une action qui s'exerce au niveau de son volume. Elle est principalement due à l'effet de la gravité ou aussi effet électromagnétique.

## II. Modélisation des actions mécaniques :

On distingue principalement deux modèles pour représenter et étudier les actions mécaniques ; le modèle local et le modèle global.

- Le modèle local permet d'étudier l'action mécanique et son effet en tout point de la zone où elle s'exerce. Ce modèle permet l'étude des pressions de contact, des contraintes dans les matériaux et la déformation des solides.
- Dans le modèle global, on associe à l'action mécanique un torseur (dit torseur d'action mécanique). Ce modèle fait disparaître l'effet local de l'action mécanique mais rend son utilisation pratique pour l'étude de l'équilibre du solide en considération.

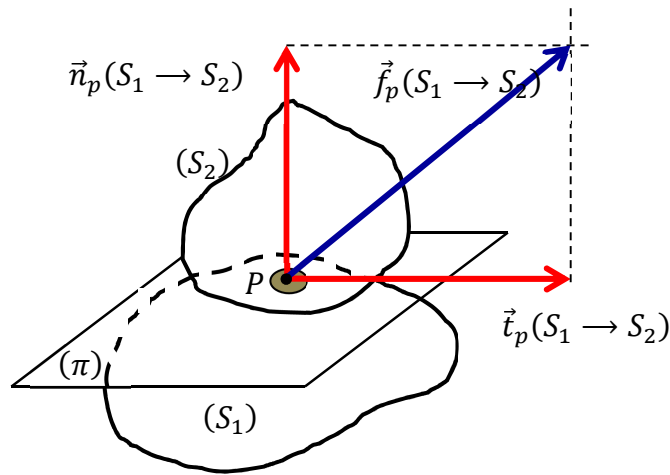
### II.1. Modélisation des actions mécaniques de contact surfacique :

#### II.1.1. Modélisation locale :

La figure suivante représente une modélisation locale de l'action mécanique du solide  $S_1$  sur le solide  $S_2$  sur une surface élémentaire  $ds$ . On note :

- ✓  $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  : densité surfacique des forces de contact ;
- ✓  $(\pi)$  : Plan tangent commun aux deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) ;
- ✓  $\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  : densité surfacique normale des forces de contact ou pression de contact au point P de l'action mécanique de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) ;
- ✓  $\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  : densité surfacique tangentielle des forces de contact au point P ;
- ✓ une densité de forces surfacique s'exprime en MPa ;  $1\text{MPa} = 1\text{N/mm}^2$
- ✓ le vecteur  $\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  est toujours orienté du solide ( $S_1$ ) vers le solide ( $S_2$ ),





### II.1.1.1. Adhérence et frottement

La loi de Coulomb donne une information sur la densité surfacique normale et tangentielle des forces de contact lorsqu'il y a **frottement** ou **adhérence** au point du contact P entre les deux solides (S1) et (S2).

Soit  $\vec{V}(P, S_2/S_1)$ , le vecteur vitesse de glissement, au point P, du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$ . Cette vitesse est située dans le plan  $(\pi)$ .

On dit qu'il y a adhérence au point P entre le solide (S1) et (S2) si :

$$\vec{V}(P, S_2/S_1) = \vec{0}$$

On dit qu'il y a frottement au point P entre le solide (S1) et (S2) si :

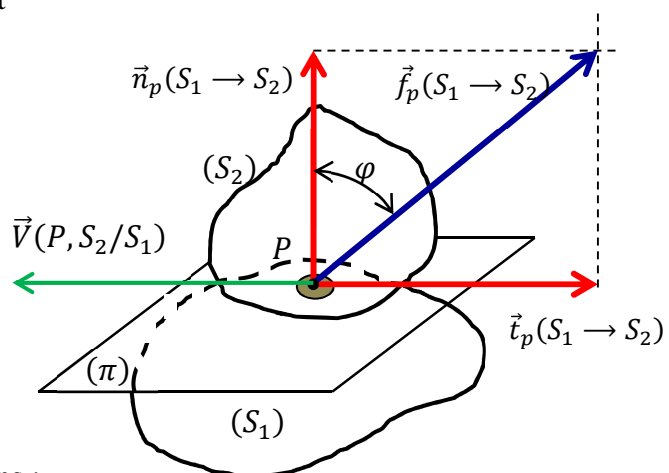
$$\vec{V}(P, S_2/S_1) \neq \vec{0}$$

#### II.1.1.1.1. Glissement relatif au point P (Frottement) : $\vec{V}(P, S_2/S_1) \neq \vec{0}$

La figure suivante représente la modélisation locale dans le cas du frottement ( $\vec{V}(P, S_2/S_1) \neq \vec{0}$ ). On note :

On note :

- ✓  $\varphi$  : angle de frottement : Angle entre  $\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  et  $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$
- ✓  $f = \tan \varphi$  : coefficient de frottement



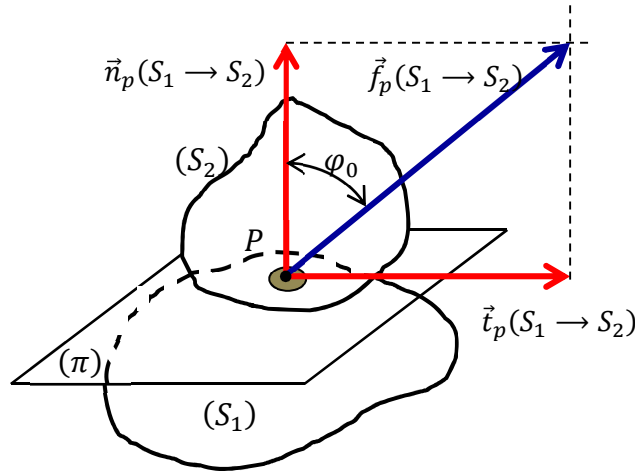
A partir de ce modèle découlent trois relations :

$$\begin{cases} \vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2) \wedge \vec{V}(P, S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P, S_2/S_1) < 0 & \text{avec } f = \tan \varphi \\ \|\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \|\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)\| \end{cases}$$

On remarque que :

- ✓  $\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)$  et  $\vec{V}(P, S_2/S_1)$  sont deux vecteurs opposés ;
- ✓  $\|\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)\|$  et  $\|\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)\|$  sont proportionnelles.
- ✓ Le coefficient de frottement dépend du type des deux matériaux en contact.

**II.1.1.1.2. Aucun glissement relatif au point P (Adhérence) ;  $\vec{V}(P, S_2/S_1) = \vec{0}$**



Pour ce cas on aura :

$$\|\vec{t}_p(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f_0 \|\vec{n}_p(S_1 \rightarrow S_2)\|$$

Avec :

- $f_0 = \tan \varphi_0$  est le coefficient d'adhérence des matériaux (S1) et (S2)
- $\varphi_0$  est l'angle d'adhérence

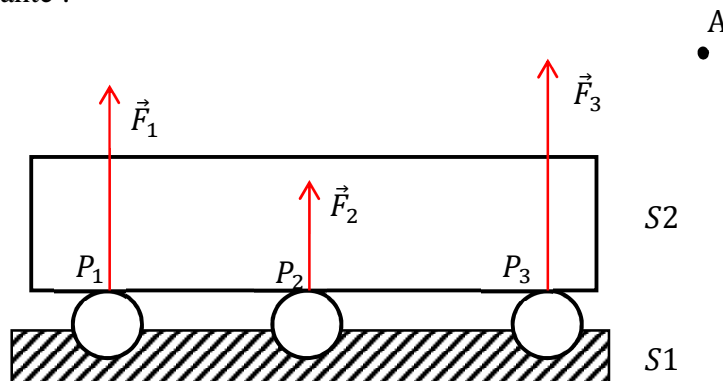
**Remarque :**

Dans la résolution d'un problème, on est parfois amené, afin d'obtenir des équations supplémentaires, à attribuer au contact sans glissement les propriétés du contact avec glissement, en se plaçant à la limite du glissement.

**II.1.2. Modélisation globale :**

**II.1.2.1. Modèle discret :**

Si le solide S1 exerce sur le solide S2 n forces  $\vec{F}_i$  de points d'application respectivement  $P_i$  comme le montre la figure suivante :



L'action mécanique de contact qu'exerce un système matériel (S1) sur le système matériel (S2) est caractérisée globalement au point A par le torseur suivant :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \end{array} \right.$$

### II.1.2.2. Modèle de surface de contact (distribution continue) :

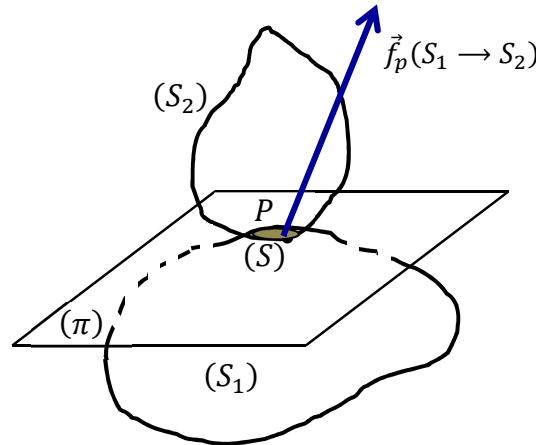
L'action mécanique de contact qu'exerce un système matériel (S1) sur une surface S d'un système matériel (S2) est caractérisée globalement, en un point A quelconque, par le torseur suivant :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \int_{P \in S} \vec{f}_p ds \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) = \int_{P \in S} \vec{AP}_i \wedge \vec{f}_p ds \end{array} \right.$$

### II.2. Modélisation des actions mécaniques de contact ponctuel :

#### II.2.1. Actions mécaniques

- ✓ Le contact réel à lieu sur une petite surface (S) qui contient le point P,
- ✓ Soit  $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ , la densité surfacique des forces de contact de (S1) et (S2), en tout point P de la petite surface (S).



L'action mécanique de (S1) sur (S2) se représente globalement par :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \int_{P \in S} \vec{f}_p ds \\ \vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) = \int_{P \in S} \vec{AP}_i \wedge \vec{f}_p ds \end{array} \right.$$

- ✓ La résultante est telle que :

$$\vec{R}(S1 \rightarrow S2) = \vec{T}(S1 \rightarrow S2) + \vec{N}(S1 \rightarrow S2) \text{ Avec : } \vec{T}(S1 \rightarrow S2) \in (\pi) \text{ et } \vec{N}(S1 \rightarrow S2) \perp (\pi)$$

- ✓ Le moment est tel que :

$$\vec{M}_A(S1 \rightarrow S2) = \vec{M}_A^n(S1 \rightarrow S2) + \vec{M}_A^t(S1 \rightarrow S2) \text{ Avec : } \vec{M}_A^t(S1 \rightarrow S2) \in (\pi) \text{ et } \vec{M}_A^n(S1 \rightarrow S2) \perp (\pi)$$

#### II.2.2. Cinématique du contact ponctuel

Le torseur cinématique du mouvement du solide (S2) par rapport au solide (S1) est :

$$\{\vartheta(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}((S_2/S_1)) \\ \vec{V}(P, S_2/S_1) \end{array} \right\}$$

Avec :

$\vec{V}(P, S_2/S_1) \in (\pi)$  représente le vecteur vitesse de glissement au point de contact de  $S_2/S_1$ .

$\vec{\Omega}((S_2/S_1)) = \vec{\Omega}_n((S_2/S_1)) + \vec{\Omega}_t((S_2/S_1))$  représente le vecteur vitesse de rotation de  $S_2/S_1$ .

$\vec{\Omega}_n((S_2/S_1))$  : Vecteur rotation de pivotement

$\vec{\Omega}_t((S_2/S_1))$  : Vecteur rotation de roulement

### II.2.3. Glissement, Roulement et Pivotement

Le tableau suivant regroupe le cas de glissement, le cas de pivotement et le cas de roulement.

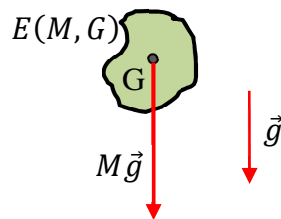
<b>Glissement Relatif</b>	$\vec{V}(A \in 2/1) \neq \vec{0}$	$\vec{V}(A \in 2/1) \wedge \vec{T}(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$ $\vec{V}(A \in 2/1) \cdot \vec{T}(1 \rightarrow 2) < 0$ $\ \vec{T}(1 \rightarrow 2)\  = f \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $
<b>Aucun glissement</b>	$\vec{V}(A \in 2/1) = \vec{0}$	$\ \vec{T}(1 \rightarrow 2)\  \leq f \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $ <i>f</i> est le coefficient de frottement entre 1 et 2
<b>Pivotement relatif</b>	$\vec{\Omega}_n(2/1) \neq \vec{0}$	$\vec{\Omega}_n(2/1) \cdot \vec{M}_A^n(1 \rightarrow 2) < 0$ $\ \vec{M}_A^n(1 \rightarrow 2)\  = \delta \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $ $\delta$ : paramètre de résistance au pivotement, homogène à une longueur
<b>Aucun pivotement</b>	$\vec{\Omega}_n(2/1) = \vec{0}$	$\ \vec{M}_A^n(1 \rightarrow 2)\  \leq \delta \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $
<b>Roulement relatif</b>	$\vec{\Omega}_t(2/1) \neq \vec{0}$	$\vec{\Omega}_t(2/1) \wedge \vec{M}_A^t(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_t(2/1) \cdot \vec{M}_A^t(1 \rightarrow 2) < 0$ $\ \vec{M}_A^t(1 \rightarrow 2)\  = \eta \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $ $\eta$ : paramètre de résistance au roulement, homogène à une longueur
<b>Aucun roulement</b>	$\vec{\Omega}_t(2/1) = \vec{0}$	$\ \vec{M}_A^t(1 \rightarrow 2)\  \leq \eta \ \vec{N}(1 \rightarrow 2)\ $

### II.3. Modélisation des actions mécaniques à distance : action de la pesanteur

On peut représenter globalement l'action de la pesanteur sur un système matériel E de masse m par un torseur suivant :

$$\{F(g \rightarrow E)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(g \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(g \rightarrow E) \end{Bmatrix}.$$

Pour le modèle donné ci-dessous, l'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel (E) de masse M et de centre d'inertie G est :



- Au point G ; centre d'inertie (centre de gravité ou centre de masse) du système matériel E, le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel E est donné par :

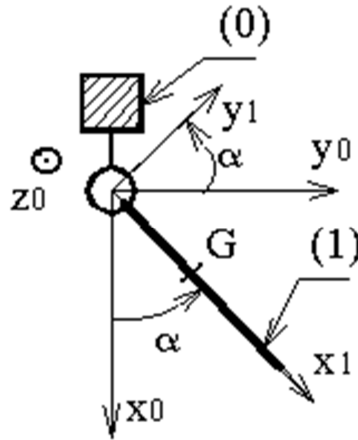
$$\{F(g \rightarrow E)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

- Au point A quelconque, le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel E est donné par :

$$\{F(g \rightarrow E)\} = \begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{AG} \wedge m\vec{g} \end{Bmatrix}_A$$

**Application :**

On considère le pendule simple (figure suivante) formé d'une tige (1) de masse  $m$  et de longueur  $2a$  en liaison pivot avec le bâti (0). Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti et le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié à la tige. On demande de chercher le torseur d'action mécanique de la pesanteur au point G, centre d'inertie de la tige, puis au point O, origine du repère  $R_0$ .



**Réponse :**

1) le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur la tige (1) au point G, centre d'inertie, est le

$$\text{torseur suivant : } \left\{ F(g \rightarrow 1) \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} m\|\vec{g}\|0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{R_0}$$

2) le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur la tige (1) au point O, est le torseur suivant :

$$\left\{ F(g \rightarrow 1) \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ \overline{OG} \wedge m\vec{g} \end{matrix} \right\}$$

avec  $\overline{OG} = a\vec{x}_1$  et  $\vec{g} = \|\vec{g}\|\vec{x}_0$  d'où on aura  $\overline{OG} \wedge m\vec{g} = ma\|\vec{g}\|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha\vec{z}_0$

$$\left\{ F(g \rightarrow 1) \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m\|\vec{g}\|\vec{x}_0 \\ -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha\vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m\|\vec{g}\| & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha \end{matrix} \right\}_{R_0}$$

**Exercices :**

**Exercice 1 : Frein d'avion**

La figure 1 représente une coupe longitudinale d'un frein d'avion où ne sont repérés que les principaux éléments :

- L'essieu 0 lié au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- La jante et la roue 1 ;
- Les cinq disques solidaires de la roue dont le disque 2 ;
- Les six disques solidaires de l'essieu, dont le disque 3.



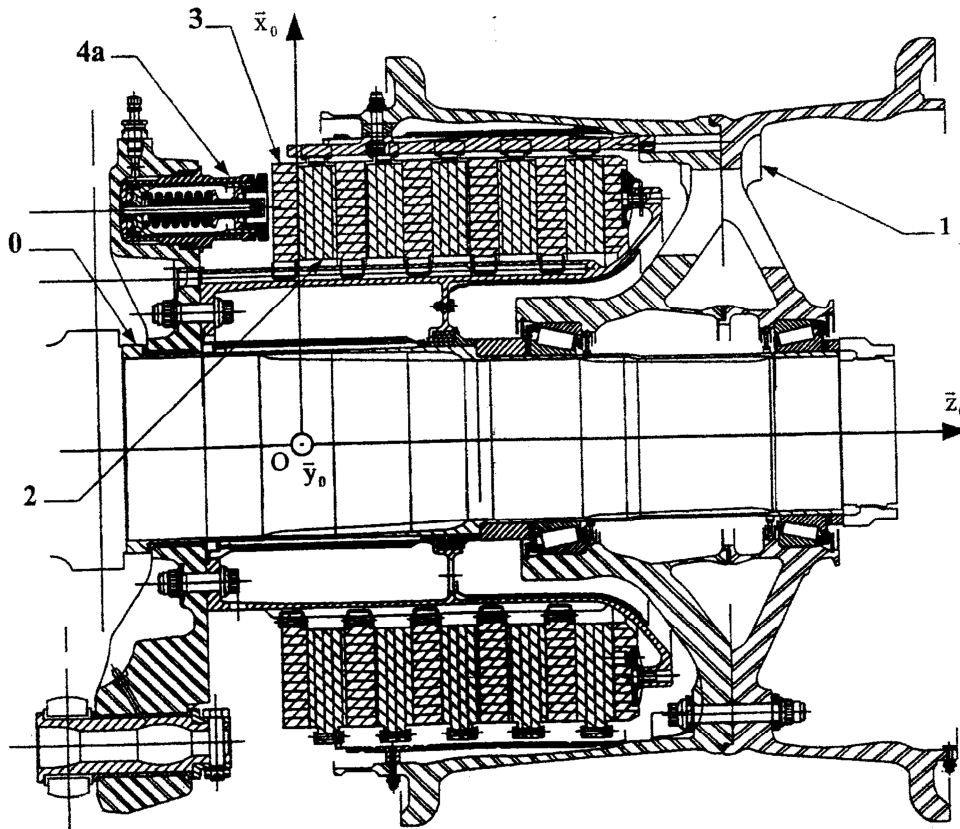


Figure 1 : coupe longitudinale d'un frein d'avion

Pour freiner, un dispositif hydraulique 4 constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4a, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 3 définie par le torseur suivant :

$$\{F(4 \rightarrow 3)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}(4 \rightarrow 3) = F_0 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Cette action est transmise intégralement au disque 2 (et de proche en proche à tous les disques). Grâce au frottement, elle génère un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 2 par rapport au disque 3. Le torseur d'action mécanique de 3 sur 2 au point O est alors le suivant :

$$\{F(3 \rightarrow 2)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}(3 \rightarrow 2) = F_0 \vec{z}_0 \\ \vec{M}_O(3 \rightarrow 2) = M_0 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

On souhaite déterminer la relation entre l'effort presseur exercé par le dispositif hydraulique 4 sur le disque 3 et le moment de freinage global exercé par le frein sur la roue. Pour cela, on s'intéresse à la surface de contact entre 2 et 3 (voir figure 2), surface annulaire de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$  et l'on désigne par  $f$  le coefficient de frottement entre les disques.

On donne une modélisation locale de l'action mécanique de 3 sur 2 au voisinage d'un point M appartenant à la surface de contact entre les disques 2 et 3 (figure 2).

On note :

- $\vec{n}_M(3 \rightarrow 2)$  : densité surfacique normale des forces de contact ou pression de contact ;
- $\vec{t}_M(3 \rightarrow 2)$  : densité surfacique tangentiel des forces de contact ;

- $\vec{f}_M(3 \rightarrow 2) = \vec{n}_M(3 \rightarrow 2) + \vec{t}_M(3 \rightarrow 2)$  : densité des forces de contact.

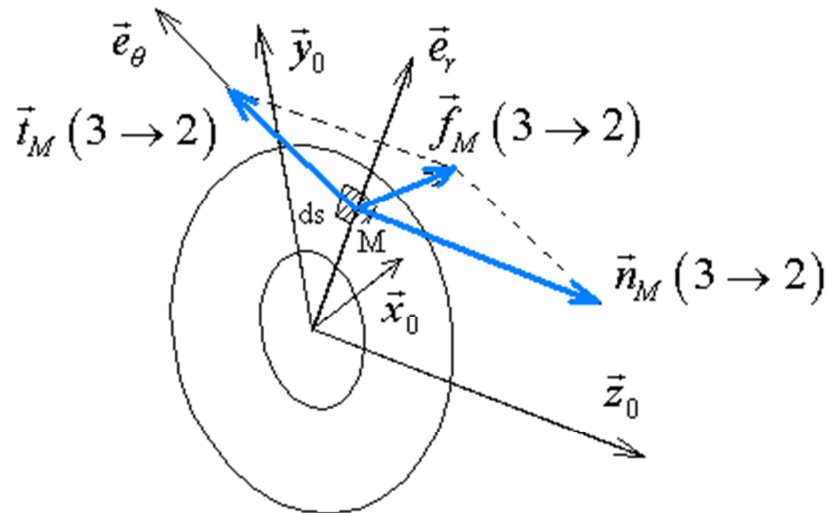


Figure 2 : modélisation locale des actions mécaniques au voisinage d'un point M

1. En se basant sur la modélisation locale de l'action mécanique de 3 sur 2 au voisinage du point M de la surface S du contact, déterminer les éléments de réductions du torseur d'action mécanique de 3 sur 2 au point O en fonction de  $p_0$  et certaines données physiques sachant qu'on adopte l'hypothèse suivante : La pression du contact est uniforme sur la surface du contact S ;  $\forall M \in S, p(M) = p_0$  ;

2. Trouver la relation entre  $F_0$  et  $M_0$ , en déduire l'expression du moment global de freinage  $M_{global}$  ;

3. Déterminer l'expression de  $M_0$  en fonction de  $F_0, f$  et  $R_m$  sachant on adopte les hypothèses supplémentaires suivantes :

On suppose que : 
$$\begin{cases} R_1 = R_m - \varepsilon \\ R_2 = R_m + \varepsilon \end{cases} \text{ avec } \varepsilon \ll R_m \text{ et } R_m = \frac{R_1 + R_2}{2} ;$$

4. Déterminer la relation entre  $F_0$  et  $M_0$  sachant qu'on adopte l'hypothèse suivante : La pression de contact entre 3 et 2 est hyperbolique en r ;  $\forall M \in S, p(M) = p_0 \frac{R_1}{r}$ . Conclure.



# Théorèmes généraux de la statique des solides indéformables

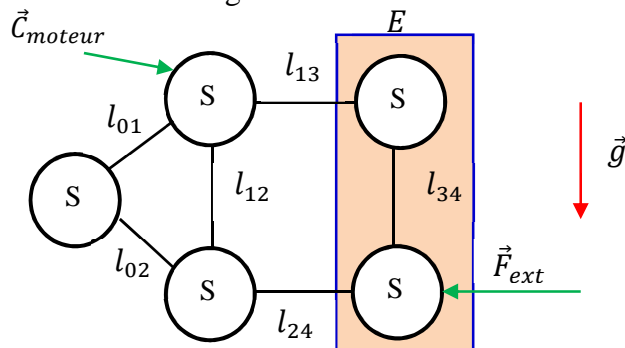
## 1. Extérieur d'un système matériel :

### I.1. Définition :

L'extérieur d'un système matériel  $E$  est tout ce qui n'est pas  $E$  et capable d'exercer une action mécanique sur  $E$ . On le note par  $\bar{E}$ .

### I.2. Exemple :

Soit l'exemple suivant (figure ci dessous) représentant le graphe de liaisons d'un mécanisme composé de 5 pièces y compris le bâti. Un moteur agit sur le solide 1 et la machine réceptrice agit sur la pièce 3.



$$E = S3 + S4 \rightarrow \bar{E} = \{S1, S2, \vec{g}, \vec{F}_{ext}\}$$

On souligne que :

- ✓ L'action de S2 sur S4 est une action mécanique de la liaison  $L_{24}$ ,
- ✓ L'action de S1 sur S3 est une action mécanique de la liaison  $L_{13}$ ,
- ✓ L'action de la pesanteur sur 3 et 4 est une action à distance à déterminer,
- ✓ L'action mécanique  $\vec{F}_{ext}$  sur S4 est généralement une donnée du problème,

Le torseur d'action mécanique extérieure au système matériel  $E$  en un point A quelconque, est la somme du torseur d'action mécanique de la liaison  $L_{24}$ , le torseur d'action mécanique de la liaison  $L_{23}$ , le torseur d'action de la pesanteur sur 3, le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur 4 et l'action mécanique  $\vec{F}_{ext}$  sur S4.

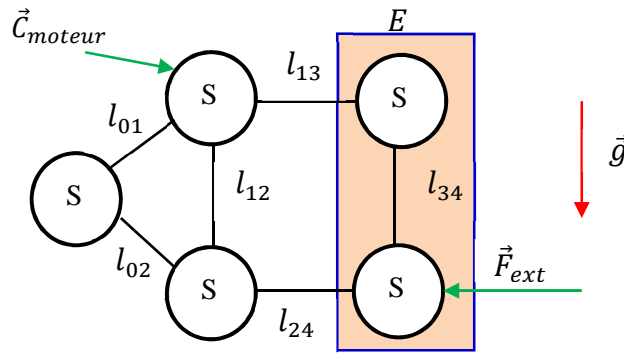
$$\begin{aligned} \{F(\bar{E} \rightarrow E)\}_A &= \{F(S1 \rightarrow S3)\}_A + \{F(S2 \rightarrow S4)\}_A + \{F(g \rightarrow S3)\}_A + \{F(g \rightarrow S4)\}_A \\ &+ \{F(\vec{F}_{ext} \rightarrow S4)\}_A \end{aligned}$$

## 2. Actions mécaniques extérieures et intérieures :

- ✓ Une action mécanique extérieure au système matériel  $E$  est une action mécanique provenant de l'extérieur  $\bar{E}$ .
- ✓ Une action mécanique intérieure au système matériel  $E$  est une action mécanique s'exerçant mutuellement entre deux éléments de  $E$ .



Exemple :



Soit le système matériel  $E = \{S3 + S4\}$ , on a :

- ✓ L'action mécanique de S1 sur S3 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique de S2 sur S4 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique de la pesanteur sur S3 et S4 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique entre la pièce S3 et la pièce S4 est une action mécanique intérieure.

### 3. Principe fondamental de la statique :

Pour qu'un système matériel  $E$  soit en équilibre par rapport à un repère Galiléen, **il faut que** le torseur d'action mécanique extérieure à  $E$  soit nul :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{0\}$$

**Remarque :** Le sens inverse n'est pas toujours vrai, on peut citer l'exemple des ciseaux,

Pour qu'un système matériel  $E$  soit en équilibre par rapport à un repère Galiléen, il faut et il suffit que :

- ✓ Il soit en équilibre au début de l'étude.
- ✓ Quel que soit un sous-système matériel  $e$  de  $E$ , on a :  $\{F(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{0\}$

### 4. Théorèmes généraux de la statique :

Le torseur d'action mécanique extérieure au système matériel  $E$ , au point  $A$  est le suivant :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) \end{array} \right\}$$

#### 4.1. Théorème de la résultante statique :

Pour un système matériel  $E$  en équilibre par rapport à un repère Galiléen, la résultante du torseur d'action mécanique extérieure à  $E$  est nulle.

$$\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires :

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (1) \\ \vec{y} \cdot \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (2) \\ \vec{z} \cdot \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (3) \end{cases}$$



## 4.2. Théorème du moment statique :

Pour un système matériel  $E$  en équilibre par rapport à un repère Galiléen, le moment du torseur d'action mécanique extérieure à  $E$  est nul.

$$\vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires :

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) = 0 & (4) \\ \vec{y} \cdot \vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) = 0 & (5) \\ \vec{z} \cdot \vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) = 0 & (6) \end{cases}$$

## 5. Théorème des actions mutuelles :

L'action mécanique d'un système matériel  $E1$  sur un système matériel  $E2$  ( $E1 \subset \overline{E2}$ ) est opposée à l'action mécanique de  $E2$  sur  $E1$ .

$$\{F(E2 \rightarrow E1)\} = -\{F(E1 \rightarrow E2)\}$$

## Exercices :

### Exercice 1 : Système de serrage

Le mécanisme représenté sur les figures 1 et 2 permet de serrer la pièce 1 sur le bâti 0 à l'aide des brides 2 et 3. L'effort de serrage est obtenu en vissant l'écrou sphérique 5 sur la vis à œil 4. La bride 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z})$  avec le bâti. La bride 3 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z})$  avec le bâti 0. La vis 4 est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z})$  avec la bride 2. L'écrou à portée sphérique 5 est en liaison hélicoïdale d'axe  $(C, \vec{x})$  avec la vis 4 et en liaison rotule de centre  $D$  avec la bride 3.

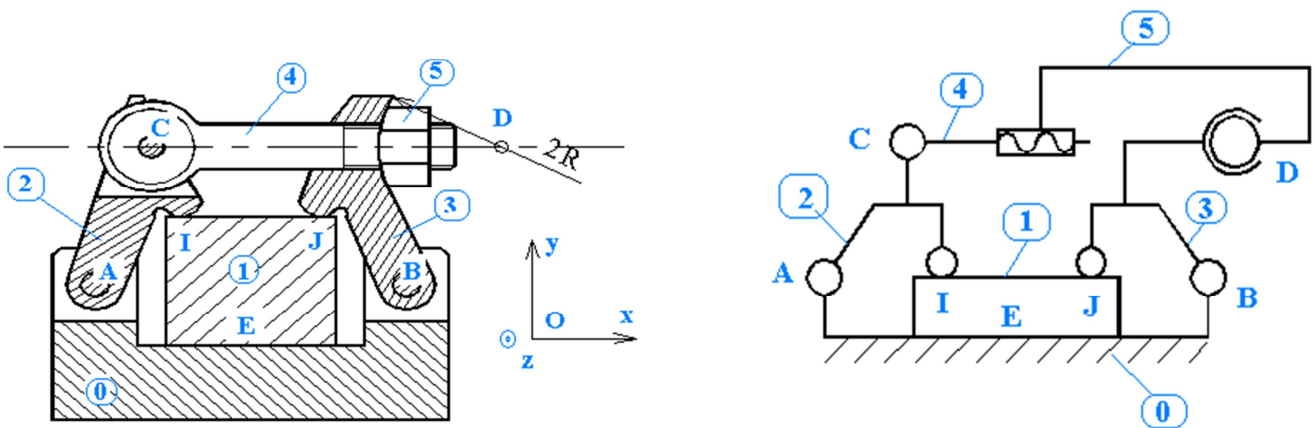


Figure 1 : dessin d'ensemble du système de serrage, Figure 2 : schéma cinématique minimal du système de serrage

L'objectif est de déterminer l'action des brides 2 et 3 sur la pièce 1.

On donne :

$\vec{AI} = L\vec{x} + h\vec{y}$ ,  $\vec{BJ} = -L\vec{x} + h\vec{y}$  et  $\vec{AC} = \vec{BD} = d\vec{x} + H\vec{y}$  avec  $L$ ,  $d$ ,  $H$  et  $h$  sont des constantes positives.

- Le système étant au repos,
- L'action mécanique de l'écrou 5 sur la bride 3 au point  $D$  est donné par le torseur suivant :

$$\{F(5 \rightarrow 3)\}_D = \begin{cases} \vec{F}_D(5 \rightarrow 3) = -S\vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

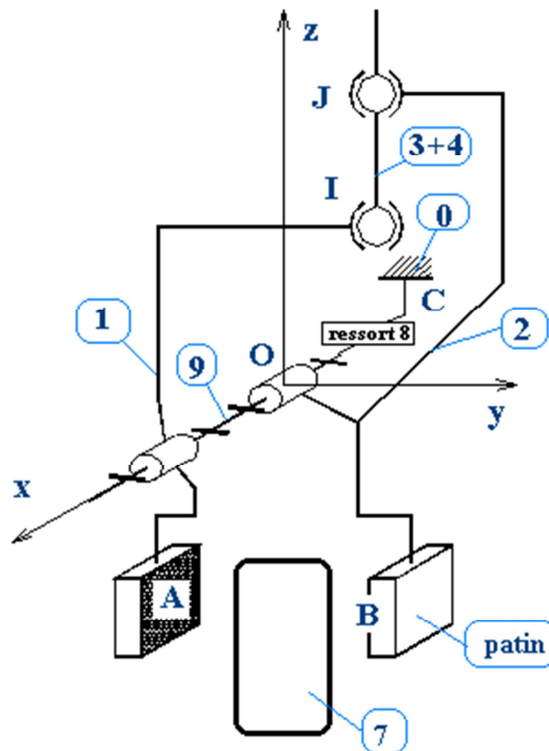
On adopte les hypothèses suivantes :

- Au repos, le système est en équilibre par rapport au repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  supposé Galiléen ;
- L'action de la pesanteur est négligée ;
- Les liaisons sont supposées parfaites.

1. Dresser le graphe des liaisons en précisant les spécifications de chaque liaison.
2. Déterminer les différents torseurs d'actions mécaniques des différentes liaisons.
3. Ecrire les équations qui découlent de l'application du théorème de la résultante statique sur l'ensemble (4 et 5).
4. Ecrire les équations qui découlent de l'application du théorème du moment statique au point A sur la bride 2.
5. Ecrire les équations qui découlent de l'application du théorème du moment statique au point B sur la bride 3.
6. Déterminer, à partir des équations scalaires définies précédemment, l'action des brides 2 et 3 sur la pièce 1.

### Exercice 2 : Frein de bicyclette

L'étrier d'un frein avant de bicyclette est constitué de deux mâchoires 1 et 2 en liaison pivot sans frottement d'axe  $(O, \vec{x})$  avec un axe d'articulation 9 lié à la fourche 0 de la bicyclette à laquelle est attaché le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . La figure ci dessous (figure 3) représente le schéma cinématique de ce système. Les mâchoires auxquelles sont liés les patins en contact avec la jante 7 de la roue (non représentée) sont actionnées en I et J par un câble 3 et sa gaine 4, par l'intermédiaire des sphères 5 et 6 en liaison rotule sans frottement, de centre I et J, avec les mâchoires.



On définit les torseurs d'action mécanique :

$$\{F_{(5 \rightarrow 1)}\}_I = \begin{Bmatrix} F\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \{F_{(6 \rightarrow 2)}\}_J = \begin{Bmatrix} -F\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } F > 0, \overline{OI} = d\vec{y} + h\vec{z} \text{ et } \overline{OJ} = d\vec{y} + h\vec{z}$$

$$\{F_{(7 \rightarrow 1)}\}_A = \begin{Bmatrix} T_1\vec{x} - N_1\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \{F_{(7 \rightarrow 2)}\}_B = \begin{Bmatrix} T_2\vec{x} - N_2\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } T_i > 0, N_i > 0, \overline{OA} = -L\vec{y} - H\vec{z} \text{ et } \overline{OB} = L\vec{y} - H\vec{z}$$

Les composantes normales et tangentielles vérifient la relation suivante :

$$T_1 = fN_1 \text{ et } T_2 = fN_2 \text{ avec } f \text{ est le coefficient de frottement entre les patins de la jante.}$$

Un ressort de rappel **8** (non représenté), de masse nulle et d'axe  $(O, \vec{x})$ , exerce entre les deux mâchoires un couple qui écarte les patins de la jante lorsque les freins sont au repos. Son action mécanique est définie par les torseurs suivants :

$$\{F_{(8 \rightarrow 1)}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_r\vec{x} \end{Bmatrix} \text{ et } \{F_{(8 \rightarrow 2)}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_r\vec{x} \end{Bmatrix} \text{ avec } C_r > 0 ;$$

L'axe  $(D, \vec{y})$  de la liaison pivot entre la roue et la fourche est tel que :  $\overline{OD} = -(H + R_{\text{moy}})\vec{z}$ , où  $R_{\text{moy}}$  est le rayon moyen de la jante.

L'axe d'articulation **9** est encastré dans la fourche au point **C**, tel que :  $\overline{OC} = -e\vec{x}$

Les différentes pièces sont supposées de masses négligeables.

- 1 – Ecrire les équations scalaires qui découlent du théorème du moment statique appliqué à la mâchoire 1.
- 2 – Ecrire les équations scalaires qui découlent du théorème du moment statique appliqué à la mâchoire 2.
- 3 – Déduire, en fonction de F, le moment du couple de freinage exercé par le frein sur la roue.
- 4 – Déterminer au point C, le torseur d'action mécanique de la fourche 0 sur l'axe d'articulation 9.



# Sujets de synthèse

## Sujet 1 : Bouche de climatisation

### Partie 1 :

On s'intéresse à une bouche de climatisation de bureau. L'air climatisé arrive par le réseau d'air climatisé du bâtiment et est distribué par plusieurs bouches. Le débit d'air entrant sur chaque bouche est initialement réglé par l'intermédiaire d'un clapet dont l'ouverture est maîtrisée par un vérin. Le schéma cinématique du système de réglage du débit d'air dans la position « clapet fermé » ( $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ) est donné ci-dessous :

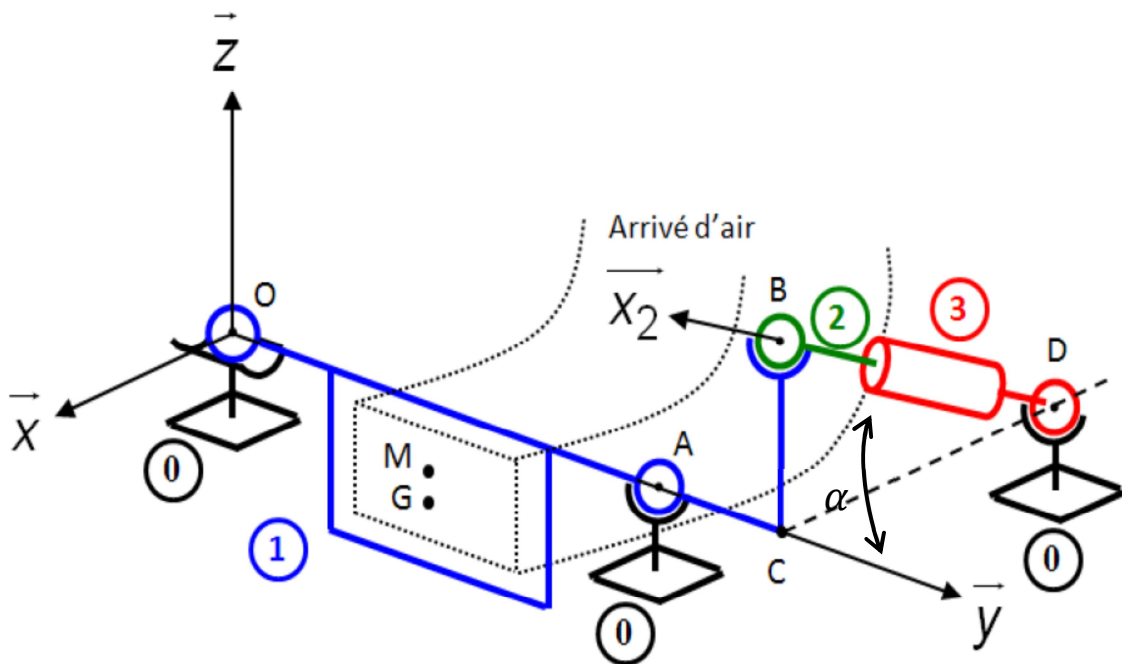


Figure 1 : Conception 1

### Constituants et paramétrage :

- Le repère  $R_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié au conduit (0) considéré comme fixe.
- Le repère  $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié à la tige du vérin 2, avec  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_2) = (\vec{z}, \vec{z}_2)$  et  $\overline{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$

### Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que  $\overline{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$ ,  $\vec{g} = g\vec{x}$

### Données :

- $\overline{OA} = 2a\vec{y}$  et  $\overline{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) :  $\{\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  ;
- Action de l'air sur le clapet (1) :  $\{\mathcal{F}(air \rightarrow 1)\}_M = \begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

1. Tracer le graphe des liaisons pour ce système en précisant le type de chaque liaison.



2. Donner le torseur des actions mécaniques de toutes les liaisons mise en œuvre.
3. Isoler le Vérin formé par l'ensemble  $E=\{2+3\}$  ; Justifier la forme du torseur  $\{F(2 \rightarrow 1)\}_B$  .
4. Déterminer le torseur d'action mécanique extérieur au clapet (1). L'exprimer au point A et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
5. Isoler le clapet (1), appliquer le PFS pour déterminer l'expression de  $X_{21}$  en fonction des données du problème.

### Partie B :

Le concepteur du système de réglage du débit d'air souhaite remplacer le vérin par un moteur électrique pour commander l'ouverture du clapet. Le schéma cinématique du système est alors le suivant :

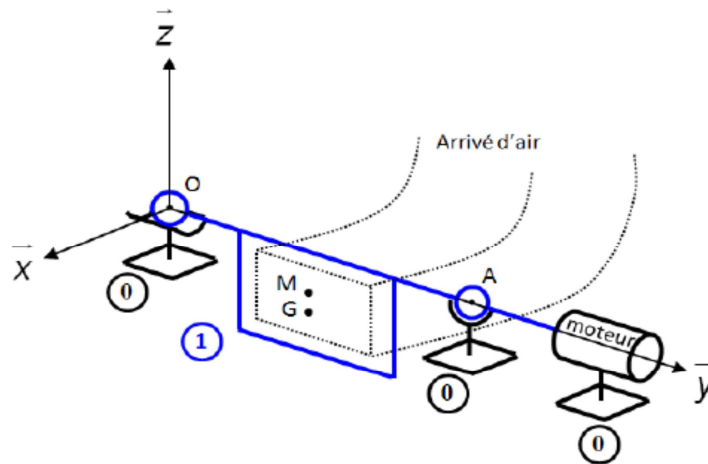


Figure 2 : Conception 2

L'objectif du problème est de déterminer, dans la position du système clapet fermé, la valeur de l'action mécanique de l'actionneur sur le clapet.

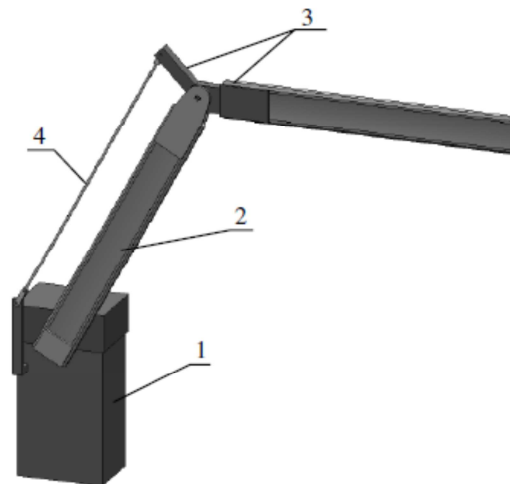
On donne l'action mécanique du moteur sur le clapet (1) par le torseur couple suivant :

$$\{F(\text{moteur} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

1. Déterminer le torseur d'action mécanique extérieur au clapet (1). L'exprimer au point A et dans la base du repère  $R_0(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .
2. En appliquant le PFS sur le clapet (1), déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  en fonction de  $F_a$ , M et des dimensions du système lorsque le système est dans la position « clapet fermé »

### Sujet 2 : Barrière de parking

On considère une barrière articulée de parking telle que représentée par la figure ci-dessous. Elle comprend quatre ensembles principaux, conçus et assemblés de manière à obtenir le parallélogramme (ABDE) (Voir le schéma cinématique).



La figure suivante représente le schéma cinématique minimal de la barrière.

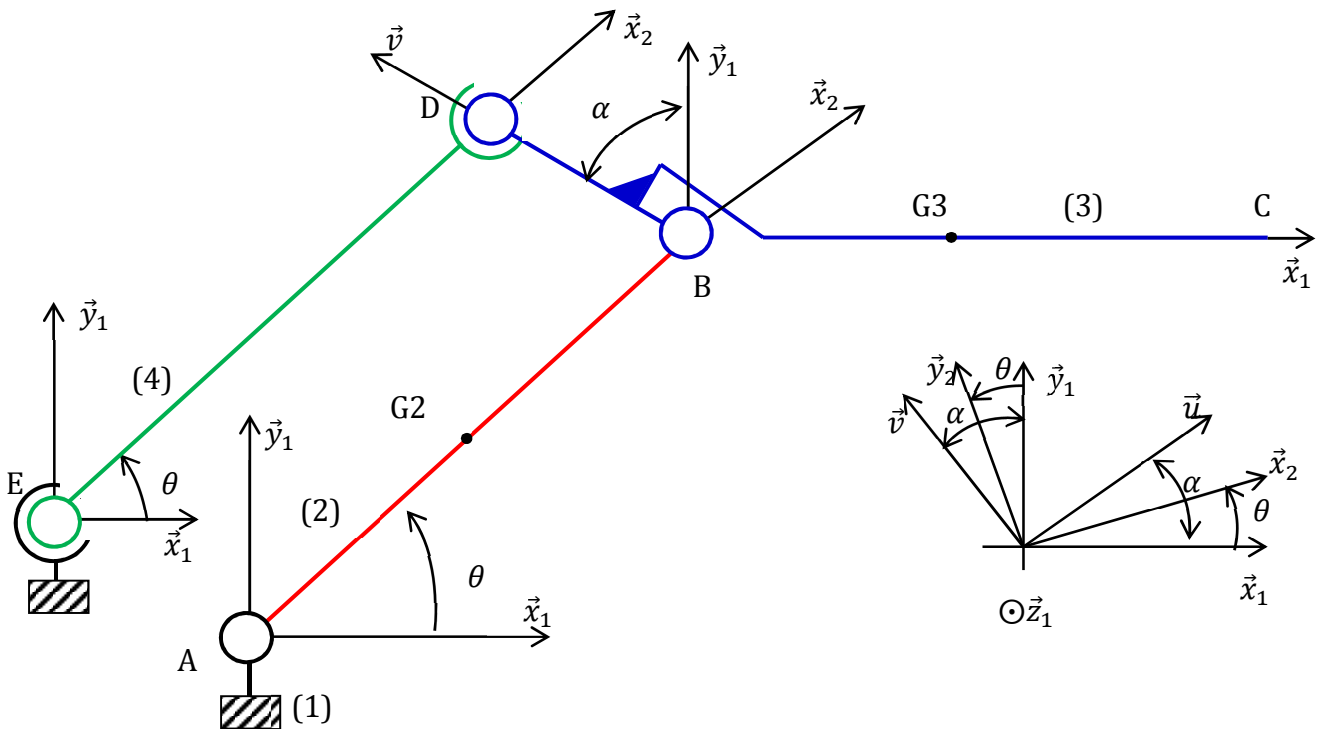
Le système est composé de :

- Un bâti (1), fixé au sol, lié au repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

- Un bras (2), lié au repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ , avec  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Un avant-bras (3), lié au repère  $R_3(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- Une bielle (4), liée au repère  $R_4(E, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ , avec  $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

### Données et hypothèses :

- $G_2$  est le centre de masse du bras (2) et  $G_3$  est le centre de masse de l'avant-bras (3).
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- La masse du bras (2) est  $m_2=m$ .
- La masse de l'avant-bras (3) est  $m_3=m$ .
- La masse de la bielle (4) est négligeable.
- La pesanteur est caractérisée par  $\vec{g} = -g\vec{y}_1$
- $\overline{AB} = L\vec{x}_2$ ,  $\overline{ED} = L\vec{x}_2$ ,  $\overline{AG_2} = \frac{L}{2}\vec{x}_2$  et  $\overline{BG_3} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ ,  $\overline{BD} = a\vec{v}$
- L'angle  $\alpha$  est constant



### Etude cinématique

1. Déterminer le torseur cinématique du bras (2) au point A dans son mouvement par rapport au bâti (1). Déduire la vitesse  $\vec{V}(B, 2/1)$ .
2. Déterminer le torseur cinématique de la bielle (4) au point E dans son mouvement par rapport au bâti (1). Déduire la vitesse  $\vec{V}(D, 4/1)$ .
3. Montrer que le mouvement de l'avant-bras (3) par rapport à (1) est une translation circulaire.

### Etude statique

En cas d'absence d'action motrice d'ouverture ou fermeture, un frein non représenté permet d'exercer sur le bras (2) un couple  $C_f \vec{z}_1$  afin de maintenir le mécanisme en équilibre par rapport au sol.

L'objectif de cette étude est le dimensionnement du frein. Il est donc important de déterminer l'expression du couple  $C_f$  en fonction du poids des pièces pour toute position d'équilibre de la barrière.

On modélise l'action du frein sur le bras (2) par le torseur suivant :

$$\{F(\text{Frein} \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_f \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

4. Donner le graphe de liaisons de la barrière. Donner les spécifications des différentes liaisons.
5. Donner les torseurs statiques des différentes liaisons.
6. Déterminer le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le bras (2). L'exprimer au point A et dans la base lié au bâti (1).
7. Déterminer le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur l'avant-bras (3). L'exprimer au point B puis au point A et dans la base liée au bâti (1).
8. En isolant la biellette (4), Montrer que  $\vec{R}(4 \rightarrow 3) = X_{43} \vec{x}_2$ . Simplifier alors le torseur statique de la liaison rotule de centre D.
9. Déterminer le torseur d'action mécanique extérieur à l'avant bras (3) au point B et dans la base lié au bâti (1).
10. En appliquant le principe fondamental de la statique sur l'avant-bras (3), déterminer l'expression de  $X_{43}$  en fonctions des paramètres du système nécessaires.
11. En appliquant le théorème du moment statique sur le système matériel  $S = \{2,3\}$  au point A et en projection sur  $\vec{z}_1$ , déterminer l'expression du couple frein  $C_f$  en fonctions des paramètres du système nécessaires.
12. A partir de la question 11, déterminer en fonction de l'angle  $\theta$ , la position la plus défavorable et en conséquence, exprimer  $C_f$ .



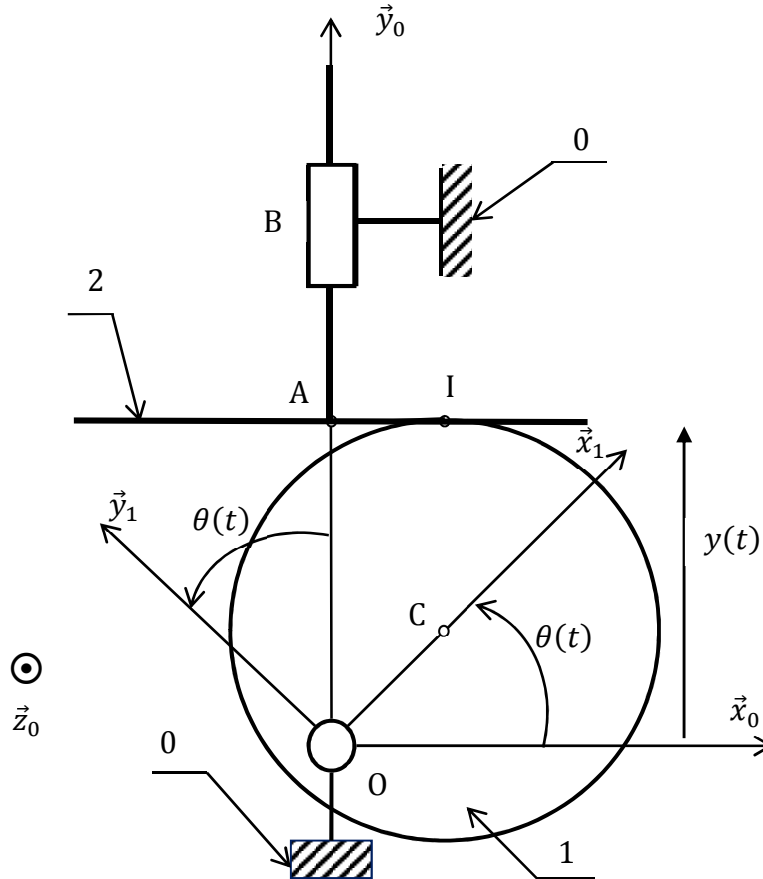


### Sujet 3 :

#### Exercice 1 : Système à excentrique

La figure suivante représente le schéma cinématique minimal d'un système de transformation de mouvement par excentrique. Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère lié au bâti (0). L'excentrique (1) a une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0). Il est assimilé à un disque de centre C et de rayon R. Soit  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  un repère lié à l'excentrique (1) tel que  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

La tige (2) a une liaison glissière d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  avec le bâti (0). (1) et (2) sont en contact ponctuel au point I. On donne :  $\vec{OC} = e\vec{x}_1$ ,  $\vec{CI} = R\vec{y}_0$ ,  $\vec{OA} = y(t)\vec{y}_0$ .



#### Etude géométrique :

1. Indiquer le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie du mécanisme ;
2. Déterminer la loi entrée-sortie : Exprimer  $y(t)$  en fonction de  $\theta(t)$  et d'autres paramètres géométriques ;
3. Déduire la course de la tige (2) ;

#### Etude cinématique :

1. Ecrire le torseur cinématique de mouvement de l'excentrique (1) par rapport au repère  $R_0$  au point O et en déduire  $\vec{V}(I \in 1/R_0)$ .
2. Ecrire le torseur cinématique de mouvement de la tige (2) par rapport au repère  $R_0$  au point A et en déduire  $\vec{V}(I \in 2/R_0)$ .

3. Calculer la vitesse de glissement au point I de la tige (2) par rapport à l'excentrique (1),  $\vec{V}(I \in 2/1)$ . Sachant que  $\dot{\theta} > 0$ . Indiquer le sens de la vitesse de glissement ( $+\vec{x}_0$  ou  $-\vec{x}_0$ ).

## Etude statique :

On donne :

- Le torseur d'action mécanique de (1) sur (2) au point I par le torseur suivant :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{y}_0 - T\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } N > 0 \text{ et } T > 0$$

- Le torseur d'action mécanique de l'extérieur sur la tige (2) provenant de la charge à soulever est donné par:

$$\{F(ext \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{ext}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

- Soit  $f$  le coefficient de frottement entre (1) et (2) ;
  - On néglige l'action de la pesanteur ;
  - Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison ponctuelle entre (1) et (2) ;
  - On prendra le cas particulier  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ;
  - On donne  $\overline{AB} = b\vec{y}_0$  ;
- Exprimer T en fonction de N sachant qu'on est à la limite de l'adhérence entre (1) et (2). Justifier l'écriture du torseur d'action mécanique de (1) sur (2).
  - Exprimer dans la base du repère  $R_0$  et au point B, le torseur d'actions mécaniques extérieures à 2.  $\{F(\bar{2} \rightarrow 2)\}_B$ .
  - En appliquant le PFS, déterminer les inconnues d'actions mécaniques de la liaison glissière d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  entre le bâti (0) et la tige (2).
  - Indiquer si on peut utiliser le modèle plan pour ce problème. Si c'est le cas, préciser le plan de symétrie à considérer et donner le torseur le torseur d'actions mécanique de la liaison glissière.

## Exercice 2 : Echelle mobile

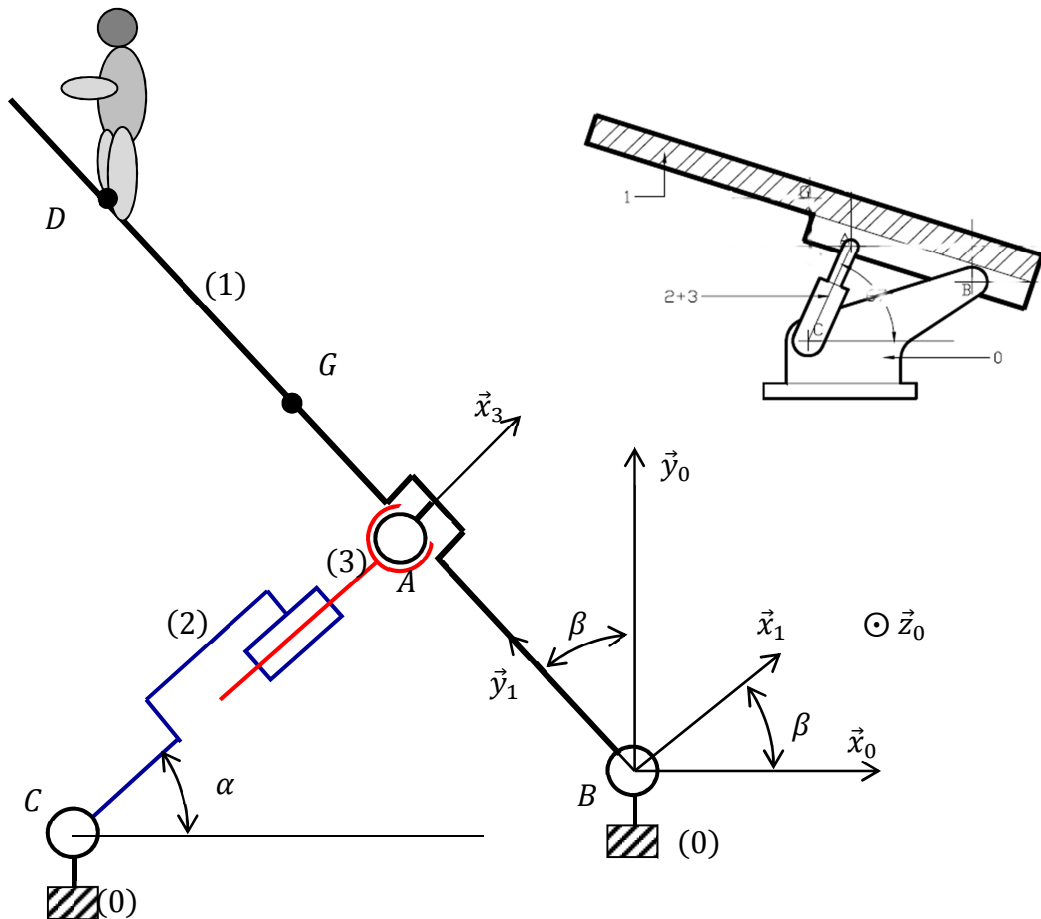
La figure suivante représente le schéma cinématique d'un dispositif d'une échelle mobile. Ce système permet de soulever une personne afin d'atteindre une hauteur donnée. Il est composé de :

- Un bâti (0) lié au repère  $R_0(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- Un vérin (2+3) lié au repère  $R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  ;
- Une échelle (1) liée au repère  $R_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  ;

On donne :  $\overline{BA} = a\vec{y}_1$ ,  $\overline{BG} = b\vec{y}_1$  et  $\overline{BD} = c\vec{y}_1$

On adopte les hypothèses suivantes :

- Le système est en équilibre ;
- Le champ de la pesanteur est donnée par :  $\vec{g} = -g\vec{y}_0$
- L'échelle est de masse  $m_e$  ;
- L'ouvrier est de masse  $m_p$  ;
- La section du vérin 2-3 est notée  $S_p$  ;
- La pression dans le vérin est notée p et est supposée constante.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.



1. Donner le graphe de liaisons du système échelle mobile.
2. Donne la forme des torseurs d'actions transmissibles des liaisons 0-2, 2-3 et 3-1 dans la base du repère  $R_3$ .
3. Déterminer les directions de  $\vec{R}(0 \rightarrow 2)$  et  $\vec{R}(1 \rightarrow 3)$  et déduire une simplification du torseur d'actions mécaniques de 3 sur 1.
4. Isoler la tige du vérin (3) et exprimer  $\|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\|$  en fonction de  $p$  et  $S_p$ .
5. En isolant l'échelle (1) et en appliquant le théorème du moment statique au point B en projection sur l'axe  $\vec{z}_0$ , déterminer l'expression de  $\|\vec{R}(1 \rightarrow 3)\|$  en fonction de  $m_p$ ,  $m_e$ ,  $g$  et d'autres données géométriques utiles.
6. On donne :  $a=900\text{mm}$ ,  $b=2000\text{mm}$ ,  $c=3500\text{mm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $S_p = 30 \times 10^{-3}\text{m}^2$ ,  $m_p = 80\text{kg}$ ,  $m_e = 50\text{kg}$ ,  $g = 10\text{ms}^{-2}$ .

Sachant que le vérin peut supporter une pression de 12bars maximum, conclure quant à la capacité du système.



# **Dynamique des solides indéformables**



# Géométrie des masses

## 1. Distribution de masse

On suppose que l'on peut introduire des distributions

- De masse volumique :  $m = \iiint_{p \in E} \rho_v(P) dv$
- De masse surfacique :  $m = \iint_{p \in E} \rho_s(P) ds$
- De masse linéique :  $m = \int_{p \in E} \rho_l(P) dl$

On notera de manière générale :  $m = \int_{p \in E} dm$

Soit E le système matériel modélisé par l'une des répartitions de masse précédemment définies.

## 2. Centre d'inertie :

### 2.1. Définition :

Le centre d'inertie d'un système matériel E, de masse m, est le point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} dm, \text{ le point } A \text{ est quelconque}$$

Dans le cas où le système matériel est homogène, on distingue, selon la répartition de la masse (modèle volumique, surfacique ou linéique), trois relations résumées dans le tableau suivant :

Modèle volumique (cube, cylindre, sphère...)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{V} \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} dv, \text{ le point } A \text{ est quelconque}$
Modèle surfacique (plaque, disque, sphère creuse...)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{S} \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} ds, \text{ le point } A \text{ est quelconque}$
Modèle linéique (tige, cerceau...)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{L} \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} dl, \text{ le point } A \text{ est quelconque}$

### 2.2. Propriétés :

1. Le centre d'inertie est unique pour un système matériel donné,
2. Le centre d'inertie est fixe par rapport à tout repère attaché au système matériel E qui est supposé indéformable.
3. Le centre d'inertie G est tel que :  $\int_{p \in E} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$
4. Si le système matériel E, de masse m et de centre d'inertie G, est constitué par un ensemble de sous systèmes matériels  $E_i$ , de masse  $m_i$  et de centre d'inertie  $G_i$ , alors le centre d'inertie G du système matériel E est tel que :

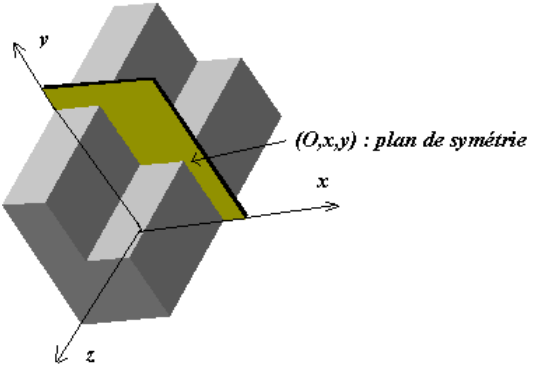
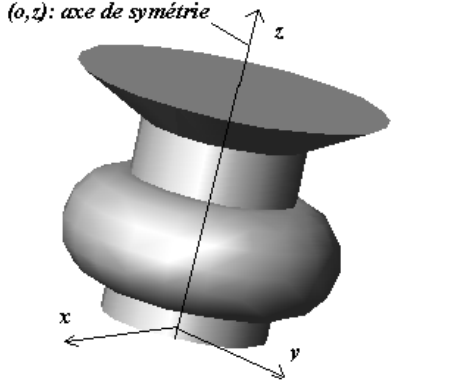
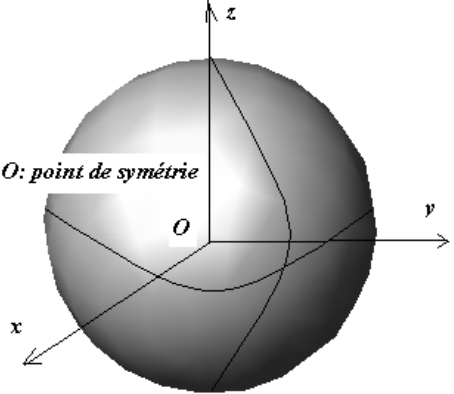
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{AG}_i = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{AG}_i}{m}$$

5. Si le système matériel admet un élément de symétrie matérielle (plan, axe ou point) alors le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.

**Remarque :**

On dit qu'il y a une symétrie matérielle, s'il y a simultanément une symétrie géométrique et une symétrie de répartition de la masse.

Le tableau suivant résume l'influence de la symétrie matérielle sur la position du centre d'inertie.

Symétrie par rapport à un plan	
 <p><i>(O,x,y) : plan de symétrie</i></p>	<p>Le plan <math>(O, \vec{x}, \vec{y})</math> est un plan de symétrie, le centre d'inertie G appartient à cet élément de symétrie et par conséquent :</p> $\vec{OG} = X_G \vec{x} + Y_G \vec{y}$ $Z_G = 0$
Symétrie par rapport à un axe	
 <p><i>(O,z) : axe de symétrie</i></p>	<p>L'axe <math>(O, \vec{z})</math> est un axe de symétrie (axe de révolution), le centre d'inertie G appartient à cet élément de symétrie et par conséquent :</p> $\vec{OG} = Z_G \vec{z}$ $X_G = Y_G = 0$
Symétrie par rapport à un point	
 <p><i>O : point de symétrie</i></p>	<p>Le point O est un point de symétrie, le centre d'inertie G est confondu avec cet élément de symétrie et par conséquent :</p> $\vec{OG} = \vec{0}$ $X_G = Y_G = Z_G = 0$





### Théorème :

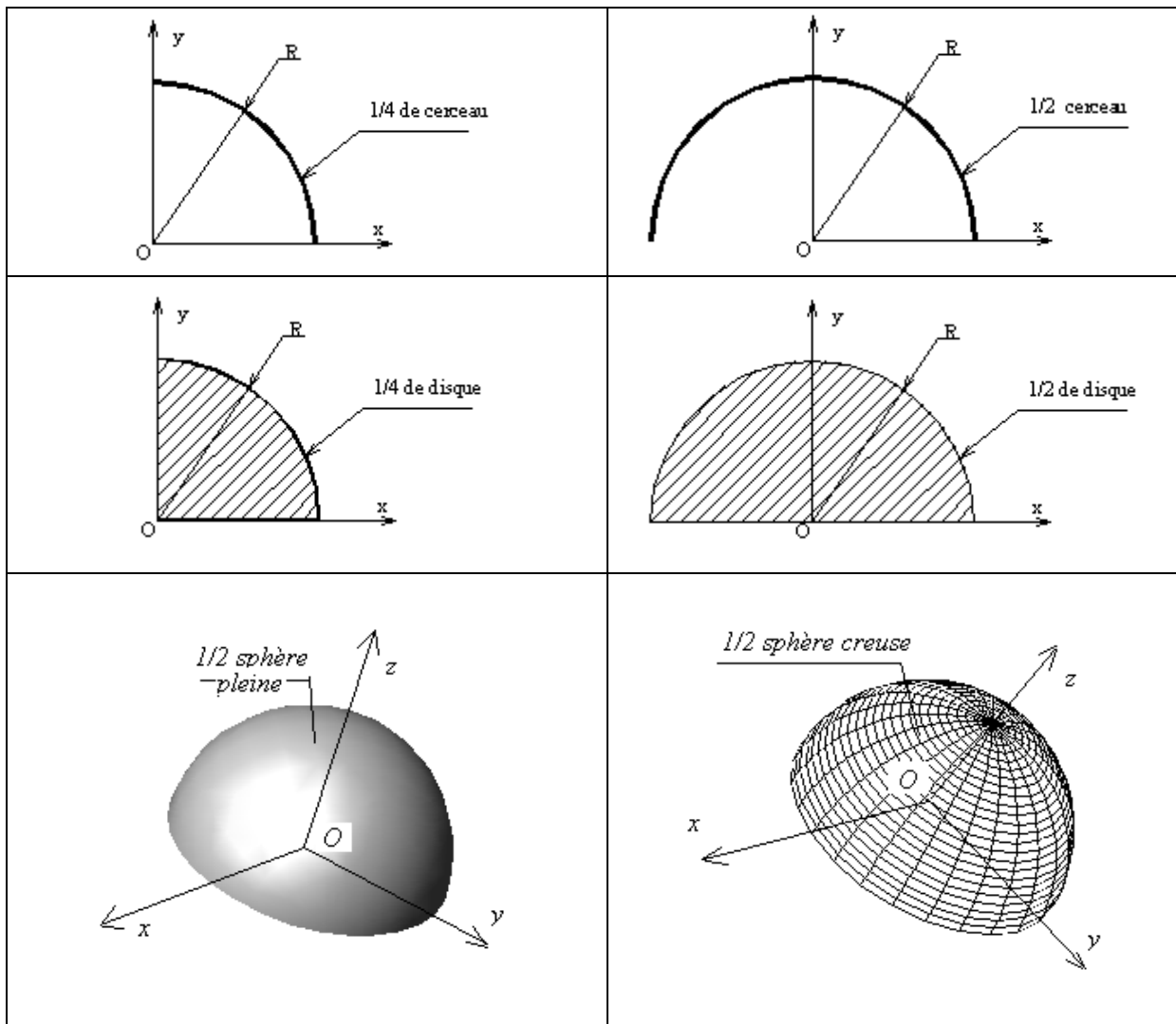
Le volume  $V$  engendré par une surface plane d'aire  $S$  tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface plane par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

$$2\pi r_G S = V$$

### 2.5. Applications :

#### Application 1 :

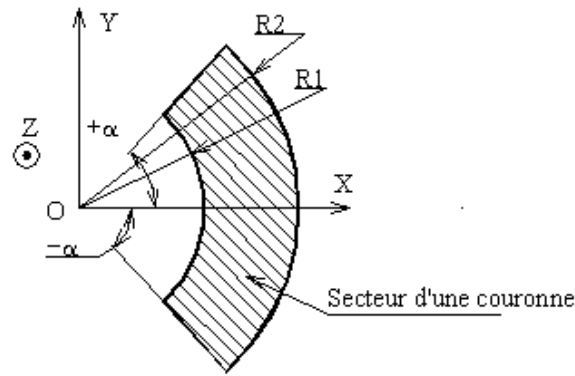
Déterminer la position du centre d'inertie des solides suivants supposés homogènes :  $\frac{1}{4}$  de disque,  $\frac{1}{2}$  disque,  $\frac{1}{4}$  de cerceau,  $\frac{1}{2}$  cerceau,  $\frac{1}{2}$  sphère creuse,  $\frac{1}{2}$  sphère pleine ;



#### Application 2 : secteur circulaire d'une couronne ;

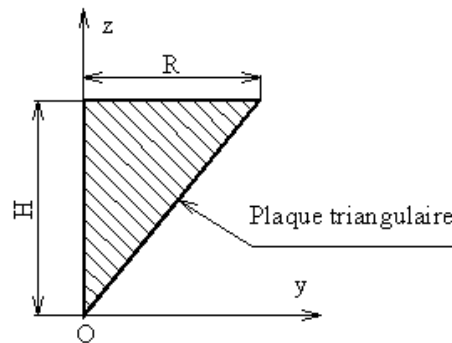
1. Déterminer le centre d'inertie du secteur circulaire (1) d'angle  $2\alpha$  d'une couronne de rayon intérieur  $r$  et de rayon extérieur  $R$ , supposée homogène.
2. En déduire le centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon  $R$  et d'un demi-disque de rayon  $R$ .



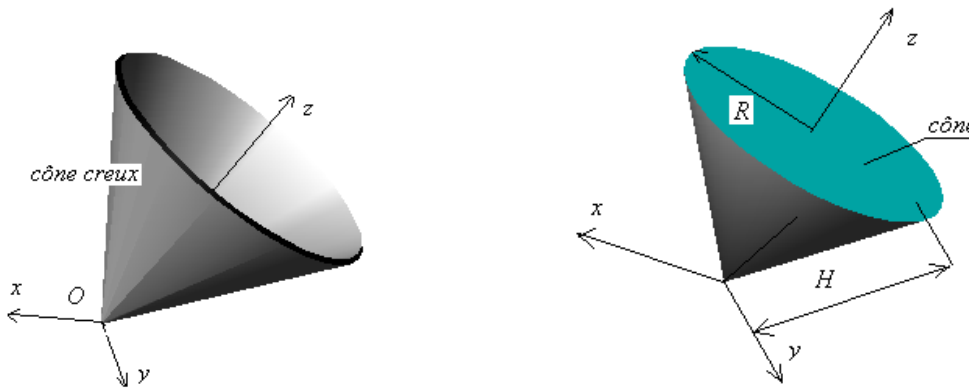


### Application 3 : Cône plein et creux;

- 1) Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque triangulaire de cotés de dimensions R et H



- 2) Déduire le volume et l'aire d'un cône de hauteur H, de demi-angle au sommet  $\alpha$  et de rayon de cercle de base R.
- 3) Déterminer la position du centre d'inertie du cône plein et du cône creux



### Application 4 :

Déterminer la position du centre d'inertie de l'ensemble S formé par les solides homogènes suivants :

- Un disque de masse  $m$  et de rayon  $R$ ,
- Une tige de masse  $m_t$  et de longueur  $l$ ,
- Un cylindre de masse  $M$ , de hauteur  $H$  et de rayon de cercle de base  $r$







On a, par définition, le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe  $\Delta$ , se calcule par l'équation suivante :

$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} r^2 dm = \int_{P \in S} \|PH\|^2 dm$$

On a  $\|\vec{u} \wedge \overline{OP}\| = \|\vec{u}\| \|\overline{OP}\| \sin(\vec{u}, \overline{OP})$

Or  $\|\overline{PH}\| = \|\overline{OP}\| \sin(\vec{u}, \overline{OP})$  et  $\|\vec{u}\| = 1$  donc  $\|\overline{PH}\| = \|\vec{u}\| \|\overline{OP}\| \sin(\vec{u}, \overline{OP}) = \|\vec{u} \wedge \overline{OP}\|$

$$\vec{u} \wedge \overline{OP} = \begin{vmatrix} x & \alpha & \beta z - \gamma y \\ y & \beta & \gamma x - \alpha z \\ z & \gamma & \alpha y - \beta x \end{vmatrix}$$

$$\|\overline{PH}\|^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

$$= \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (z^2 + x^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

$$I(S/\Delta) = \alpha^2 \underbrace{\int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm}_A + \beta^2 \underbrace{\int_{P \in S} (z^2 + x^2) dm}_B + \gamma^2 \underbrace{\int_{P \in S} (x^2 + y^2) dm}_C - 2\beta\gamma \underbrace{\int_{P \in S} yz dm}_D$$

$$- 2\gamma\alpha \underbrace{\int_{P \in S} zx dm}_E - 2\alpha\beta \underbrace{\int_{P \in S} xy dm}_F$$

$$= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\gamma\alpha E - 2\alpha\beta F$$

## 4.2. Opérateur d'inertie

### Définition

L'opérateur d'inertie d'un solide (S), en un point O, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur  $\vec{u}$  fait correspondre le vecteur :

$$I_o(S)\vec{u} = \int_{P \in S} \overline{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overline{OP}) dm.$$

### Remarques

- L'opérateur d'inertie est appelé également tenseur d'inertie,
- L'opérateur d'inertie étant linéaire, il est représentable par une matrice dite matrice d'inertie du solide (S) au point O dans une base donnée.

## 4.3. Matrice d'inertie

La matrice d'inertie du solide (S), au point O, dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  s'écrit avec les notations définies précédemment par :

$$[I_o(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})}$$

### Remarques

- L'opérateur d'inertie est symétrique,
- Les différents termes de la matrice d'inertie se calculent à partir de l'opérateur d'inertie par les relations suivantes :

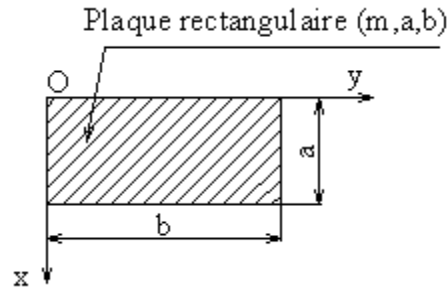
$$\begin{array}{l|l}
 A = \vec{X} \cdot [I_o(S)] \vec{X} & D = -\vec{Z} \cdot [I_o(S)] \vec{Y} = -\vec{Y} \cdot [I_o(S)] \vec{Z} \\
 B = \vec{Y} \cdot [I_o(S)] \vec{Y} & E = -\vec{X} \cdot [I_o(S)] \vec{Z} = -\vec{Z} \cdot [I_o(S)] \vec{X} \\
 C = \vec{Z} \cdot [I_o(S)] \vec{Z} & F = -\vec{Y} \cdot [I_o(S)] \vec{X} = -\vec{X} \cdot [I_o(S)] \vec{Y}
 \end{array}$$

### 4.3. Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe  $\Delta(O, \vec{u})$  est :

$$I(S/\Delta) = \vec{u} [I_o(S)] \vec{u}$$

### 4.4. Application : Plaque rectangulaire



1. Ecrire au point O, dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , la matrice d'inertie du solide S

2. Déterminer le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe  $\Delta(O, \vec{u})$  tel que  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

## 5. Base principale d'inertie:

L'opérateur d'inertie étant symétrique, il possède un système de trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux. Donc il existe, en tout point, au moins une base orthonormée directe dite base principale d'inertie dans laquelle la matrice d'inertie est diagonale.

Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base principale d'inertie du solide S au point O. dans cette base, la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_o(S)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

- $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  : moments principaux d'inertie du solide (S) au point O (valeurs propres de l'opérateur d'inertie)
- $(O, \vec{e}_1), (O, \vec{e}_2),$  et  $(O, \vec{e}_3)$  : axes principaux d'inertie du solide (S) au point O.





- 1/2 cerceau ;
- 1/4 de disque ;
- 1/2 disque,
- 1/2 sphère pleine ;
- 1/2 sphère creuse,
- cylindre

## Exercices :

### Exercice 1 :

Le solide donné par la figure 1 est formé d'1/4 de disque et d'une plaque rectangulaire. il est supposé homogène et d'épaisseur négligeable. Le 1/4 de disque est de masse  $m$  et de rayon  $R$ . La plaque rectangulaire est de masse  $M$ , de largeur  $a$  et de longueur  $b$ .

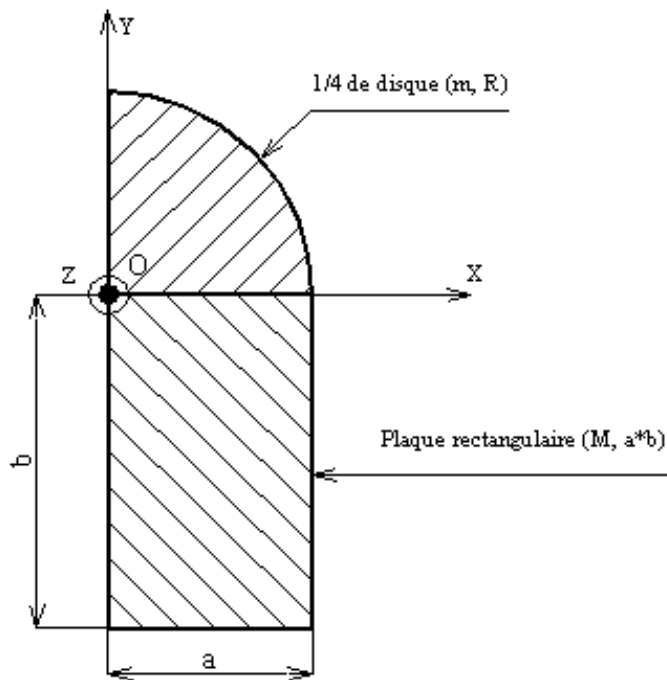


Figure 1 : modèle d'1/4 de disque + plaque rectangulaire

- 1) Déterminer le centre d'inertie de l'1/4 de disque,
- 2) Dédire le centre d'inertie de l'ensemble formée par la plaque rectangulaire et l'1/4 de disque,
- 3) En appliquant le deuxième théorème de Guldin, déterminer le volume généré par la plaque ( $\Sigma=1/4$  disque+plaque rectangulaire) en tournant autour de l'axe  $(O, \vec{Y})$ .
- 4) Déterminer la matrice d'inertie de l'1/4 de disque au point O dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,
- 5) Déterminer La matrice d'inertie de la plaque rectangulaire au point O dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,
- 6) Dédire la matrice d'inertie de l'ensemble  $\Sigma$  au point O dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,
- 7) A l'aide d'un dispositif de masse négligeable, on fixe à la plaque  $\Sigma$  dans son plan un solide assimilé à un point matériel P de masse  $m'$ . (on se place dans le cas particulier  $m=M=m'$  et  $a=b=R$ )
  - a) Où doit-on placer ce point matériel P pour que la matrice d'inertie du système rigide  $S1=\Sigma+P$  au point O dans la base  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  soit de révolution autour de l'axe  $(O, \vec{Z})$ ,



- b) En déduire dans ce cas le moment d'inertie du système S1 par rapport à un axe  $\Delta$  passant par O et contenu dans le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$ .

### Exercice 2 :

Les solides 1 et 2 de l'éolienne donnée par la figure suivante est modélisée par :

- Solide 1 : homogène de masse  $m_1$ , centre d'inertie en A, admettant le plan  $(A, x_1, z_1)$  comme plan

de symétrie matérielle. La matrice d'inertie en A :  $I_A(1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(x_1, y_1, z_1)}$

- Solide 2 : homogène de masse  $m_2$ , centre d'inertie en  $G_2$ , ce solide est constitué de :
  1. d'un cylindre plein 2' d'axe  $(A, x_2)$  de masse  $m'_2$ , de centre d'inertie  $G'_2$  ( $G'_2 G_2 = \mu x_2$ ), de hauteur H et de rayon R ;
  2. d'une plaque rectangulaire 2'' de masse  $m''_2$ , de centre d'inertie  $G''_2$  ( $G_2 G''_2 = \lambda x_2$ ), de coté a suivant  $(G''_2, y_2)$ , de coté b suivant  $(G''_2, z_2)$  et d'épaisseur négligeable.

On a  $\mu > 0, \lambda > 0, m_2 = m'_2 + m''_2$

- 1) Simplifier la matrice d'inertie  $I_A(1)$  connaissant le plan de symétrie ;
- 2) Déterminer :
  - La relation entre  $\mu$  et  $\lambda$  ;
  - La matrice d'inertie en  $G'_2$  du solide 2' dans la base  $(x_2, y_2, z_2)$  ;
  - La matrice d'inertie en  $G''_2$  du solide 2'' dans la base  $(x_2, y_2, z_2)$  ;
  - La matrice d'inertie en  $G_2$  du solide 2 dans la base  $(x_2, y_2, z_2)$  ;

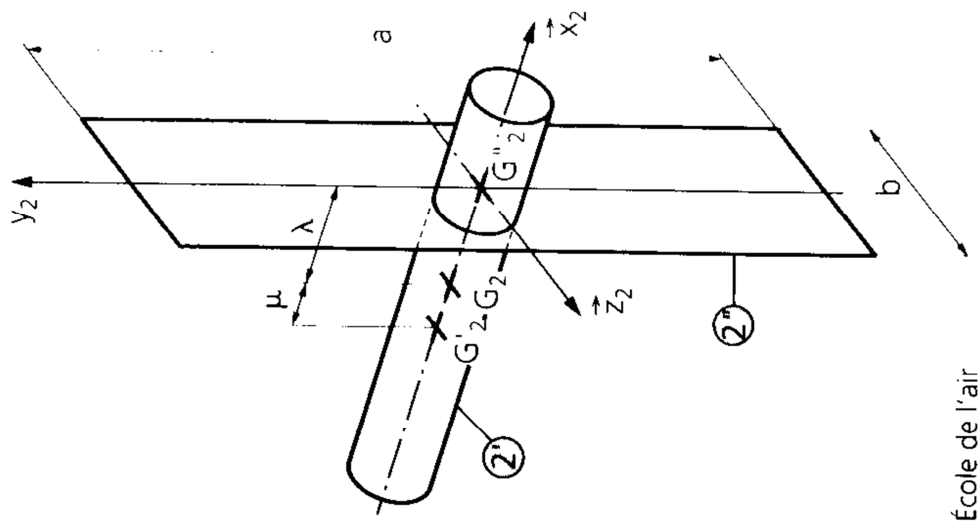


Figure 2 : géométrie de l'éolienne

### Exercice 3 : (Ecole de l'air)

Une roulette (figure 3) est assimilée à un disque homogène de rayon  $5r$  percé de quatre trous de rayon  $r$ , l'un centré en A et les trois autres également répartis sur un cercle de rayon  $3r$ . la masse de la roulette est  $m$ . déterminer son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(A, z) = I_{AZ}$  en fonction de  $m$  et  $r$ .

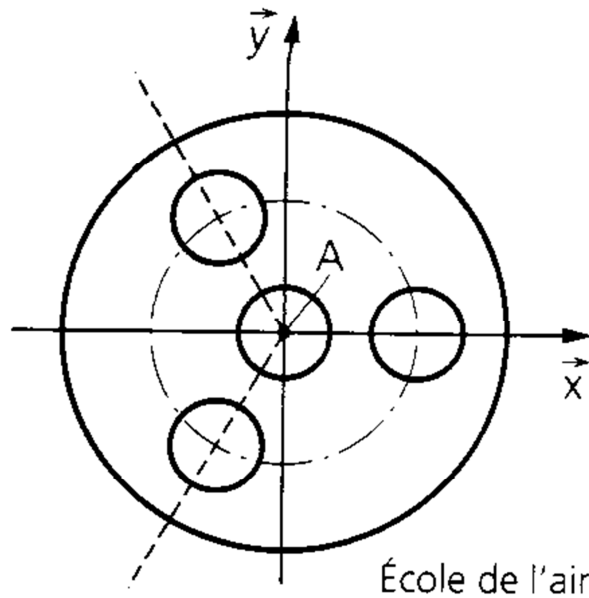


Figure 3 : géométrie de la roulette

**Exercice 4 :**

Le réflecteur parabolique est un solide de révolution constitué d'une plaque mince homogène de masse  $m$ , de rayon  $R$ , de densité surfacique  $\sigma$  et à pour équation  $x_1 = q y_1^2$  comme l'indique la figure 4.

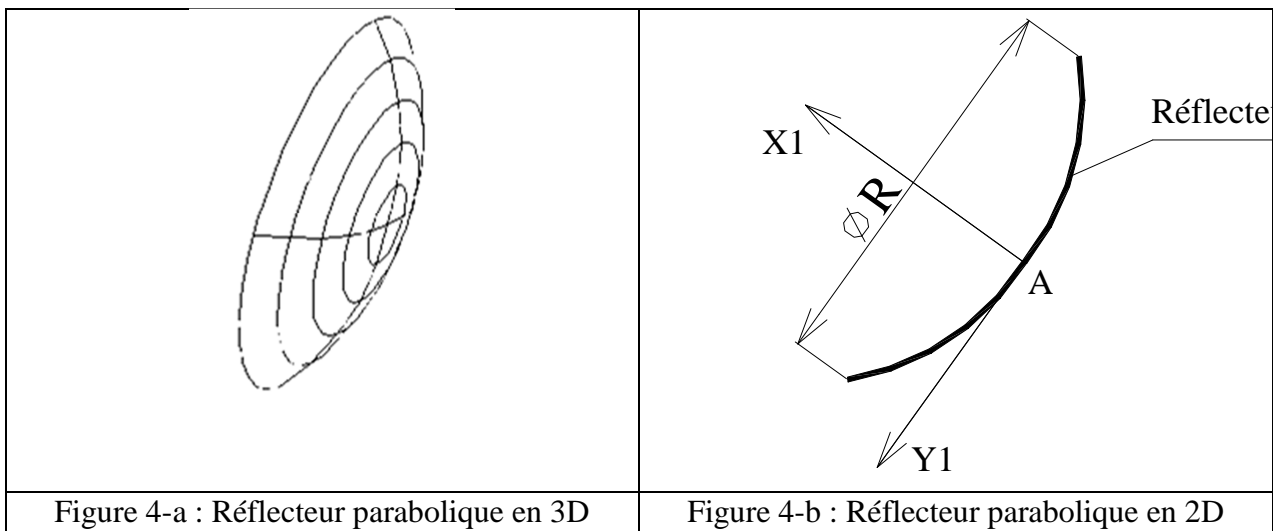


Figure 4 : deux vues pour le réflecteur parabolique

**C-1.** Démontrer que la surface de la parabole s'écrit sous la forme :  $S = 2\pi \int_0^R y_1 \sqrt{1+t_1^2} dy_1$  avec  $t_1 = \frac{dx_1}{dy_1}$ ,

Calculer cette surface en fonction de  $R$  et  $q$ .

En prenant l'hypothèse  $\varepsilon = q^2 R^2 \ll 1$ , montrer que  $S = \pi R^2$  ;

**NB :**

- Choisir un élément de surface une couronne de hauteur  $dl$ .

**C-2.** Montrer que le centre d'inertie (G) du réflecteur est tel que :  $\overline{AG} = x_G \vec{X}_1$  avec

$$x_G = \frac{2\pi}{S} \int_0^R x_1 y_1 \sqrt{1+t_1^2} dy_1 . \text{ Exprimer } x_G \text{ en fonction de } q \text{ et } R.$$

**C-3.** La matrice d'inertie du réflecteur au point A dans la base  $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$  est de la forme :



$$[I_A(\mathbf{1})] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)}, \text{ justifier la forme de cette matrice.}$$

**C-4.** Montrer que le moment d'inertie  $A$  est de la forme :  $A = 4\pi\sigma \int_0^R y_1^3 \sqrt{1+t_1^2} dy_1$ . Calculer  $A$  en fonction de  $m$  et  $R$ .

**C-5.** Montrer que le moment d'inertie  $B$  est de la forme :  $B = 2\pi\sigma \int_0^R y_1 (x_1^2 + y_1^2) \sqrt{1+t_1^2} dy_1$ . Calculer  $B$  en fonction de  $m$  et  $R$ .

**C-6.** Montrer que la matrice d'inertie au point G, du réflecteur dans la base  $(\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_0)$  est de la forme :

$$[I_A(\mathbf{1})] = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & B' \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0)} \text{ et calculer } A' \text{ et } B'$$



# Torseur cinétique, torseur dynamique et énergie cinétique des solides indéformables

## 1. Torseur cinétique :

Soit E un système matériel de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

### 1.1. Définition

Le torseur cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm \\ \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \end{array} \right\}$$

- $\int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm$  : La résultante cinétique ou quantité de mouvement de E dans son mouvement par rapport à R
- $\int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$  : Le moment cinétique au point A, de E dans son mouvement par rapport à R. On le note habituellement par :  $\overline{\sigma}_A(E/R)$ .

### 1.2. Expression de la résultante cinétique

$$\overline{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in E} \overline{OP} dm \Rightarrow \frac{d}{dt} [m\overline{OG}]_R = \left[ \frac{d}{dt} \int_{P \in E} \overline{OP} dm \right]_R$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse :

$$m \left[ \frac{d}{dt} \overline{OG} \right]_R = \int_{P \in E} \left[ \frac{d}{dt} \overline{OP} \right]_R dm \Rightarrow m\vec{V}(G/R) = \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm$$

D'où l'expression du torseur cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est le suivant :

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(G/R) \\ \overline{\sigma}_A(E/R) \end{array} \right\}$$

- **Transport du moment cinétique du point A au point B**

$$\overline{\sigma}_B(E/R) = \overline{\sigma}_A(E/R) + m\vec{V}(G/R) \wedge \overline{AB}$$

Lorsque le système matériel E se réduit à une masse ponctuelle m au point P, le torseur cinétique devient :

$$\{C(P/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(P/R) \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(P/R) \\ \overline{AP} \wedge m\vec{V}(P/R) \end{array} \right\}$$

### 1.3. Moment cinétique d'un solide :

Le moment cinétique d'un solide S, au point A, dans son mouvement par rapport au repère R est :



$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \overline{V(P \in S/R)} dm$$

Si de plus  $A \in S$ , Alors  $\overline{V(P \in S/R)} = \overline{V(A \in S/R)} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A(S/R) &= \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \left[ \overline{V(A \in S/R)} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP} \right] dm \\ &= \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \overline{V(A \in S/R)} dm + \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP} \right] dm \\ &= \left( \int_{P \in S} \overline{AP} dm \right) \wedge \overline{V(A \in S/R)} + [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R) \\ &= m \overline{AG} \wedge \overline{V(A \in S/R)} + [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R) \end{aligned}$$

Le moment cinétique du solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à R est le vecteur suivant :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overline{AG} \wedge \overline{V(A \in S/R)} + [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$$

### Remarque :

La matrice d'inertie  $[I_A(S)]$  du solide (S) au point A et le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\Omega}(S/R)$  doivent être exprimés dans la même base. Il est conseillé d'exprimer  $\vec{\Omega}(S/R)$  dans la base où on a exprimé la matrice d'inertie.

### Cas particuliers :

1. Le point A est fixe dans le repère R :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = [I_A(S)] \vec{\Omega}(S/R)$
2. Le point A et le centre d'inertie G sont confondus :  $\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \vec{\Omega}(S/R)$

## 2-Torseur dynamique :

Soit E un système matériel de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

### 2.1. Définition

Le torseur dynamique du système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \overline{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{\Gamma}(P/R) dm \end{array} \right\}_A$$

- $\int_{P \in E} \overline{\Gamma}(P/R) dm$  : La résultante dynamique ou quantité d'accélération de E dans son mouvement par rapport à R
- $\int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{\Gamma}(P/R) dm$  : Le moment dynamique au point A, de E dans son mouvement par rapport à R. On le note habituellement par :  $\overline{\delta}_A(E/R)$ .

### 2. 2. Expression de la résultante dynamique

$$m \overline{V}(G/R) = \int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ m \overline{V}(G/R) \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \int_{P \in E} \overline{V}(P/R) dm \right]_R$$

Compte tenue du principe de conservation de la masse :

$$m \frac{d}{dt} \left[ \overline{V(G/R)} \right]_R = \int_{P \in E} \frac{d}{dt} \left[ \overline{V(G/R)} \right]_R dm$$

$$m \overline{\Gamma(G/R)} = \int_{P \in E} \overline{\Gamma(P/R)} dm$$

D'où l'expression du torseur dynamique du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est le suivant :

$$\{D(E/R)\} = \begin{Bmatrix} m \overline{\Gamma(G/R)} \\ \overline{\delta(E/R)} \end{Bmatrix}_A$$

▪ **Transport du moment cinétique du point A au point B**

$$\overline{\delta_B(E/R)} = \overline{\delta_A(E/R)} + m \overline{\Gamma(G/R)} \wedge \overline{AB}$$

Lorsque le système matériel E se réduit à une masse ponctuelle m au point P, le torseur cinétique devient :

$$\{D(P/R)\} = \begin{Bmatrix} m \overline{\Gamma(P/R)} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} m \overline{\Gamma(P/R)} \\ \overline{AP} \wedge m \overline{\Gamma(P/R)} \end{Bmatrix}_A$$

**2.3. Relation entre le moment dynamique et le moment cinétique :**

$$\overline{\sigma_A(E/R)} = \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{V(P/R)} dm$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_A(E/R)} \right]_R &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{V(P/R)} dm \right]_R \\ &= \int_{P \in E} \frac{d}{dt} \left[ \overline{AP} \wedge \overline{V(P/R)} \right]_R dm \\ &= \int_{P \in E} \frac{d}{dt} \left[ \overline{AP} \right]_R \wedge \overline{V(P/R)} dm + \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \frac{d}{dt} \left[ \overline{V(P/R)} \right]_R dm \\ &= \int_{P \in E} \left[ \overline{V(P/R)} - \overline{V(A/R)} \right] \wedge \overline{V(P/R)} dm + \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{\Gamma(P/R)} dm \\ &= \overline{\delta_A(E/R)} - \overline{V(A/R)} \wedge \int_{P \in E} \overline{V(P/R)} dm \\ &= \overline{\delta_A(E/R)} - \overline{V(A/R)} \wedge m \overline{V(G/R)} \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\overline{\delta_A(E/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_A(E/R)} \right]_R + \overline{V(A/R)} \wedge m \overline{V(G/R)}$$

**Remarque :**

Le vecteur vitesse  $\overline{V(A/R)}$ , est uniquement su point géométrique A, il se calcule uniquement par dérivation du vecteur position du point A dans le repère R. pour cela on note la différence entre ces deux vecteurs ;  $\overline{V(A/R)} \neq \overline{V(A \in S/R)}$ .

**Cas particuliers :**

1. Le point A est fixe dans le repère R :  $\overline{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_A(S/R)} \right]$
2. Le point A et le centre d'inertie G sont confondus :  $\overline{\delta_G(S/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_G(S/R)} \right]$

3. les vecteurs vitesses  $\overline{V(A/R)}$  et  $\overline{V(P/R)}$  sont parallèles :  $\overline{\delta_A(S/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_A(S/R)} \right]$

### 3-Méthodes de résolution :

$$\begin{array}{ccc}
 [I_G(S)] \dots \dots \dots (5) \dots \rightarrow [I_A(S)] & & \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow (1) & & \downarrow (6) \\
 \vdots & & \vdots \\
 \overline{\sigma_G(S/R)} \dots \dots \dots (4) \dots \rightarrow \overline{\sigma_A(S/R)} & & \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow (2) & & \downarrow (7) \\
 \vdots & & \vdots \\
 \overline{\delta_G(S/R)} \dots \dots \dots (3) \dots \rightarrow \overline{\delta_A(S/R)} & & 
 \end{array}$$

- (1):  $\overline{\sigma_G(S/R)} = [I_G(S)] \overline{\Omega(S/R)}$
- (2):  $\overline{\delta_G(S/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_G(S/R)} \right]$
- (3):  $\overline{\delta_B(E/R)} = \overline{\delta_A(E/R)} + m \overline{\Gamma(G/R)} \wedge \overline{AB}$
- (4):  $\overline{\sigma_A(S/R)} = m \overline{AG} \wedge \overline{V(A \in S/R)} + [I_A(S)] \overline{\Omega(S/R)}$
- (5): *théorème de Hyguens*
- (6):  $\overline{\sigma_A(S/R)} = m \overline{AG} \wedge \overline{V(A \in S/R)} + [I_A(S)] \overline{\Omega(S/R)}$
- (7):  $\overline{\delta_A(E/R)} = \frac{d}{dt} \left[ \overline{\sigma_A(E/R)} \right]_R + \overline{V(A/R)} \wedge m \overline{V(G/R)}$

### 4-Energie cinétique :

#### 4.1. Définition :

L'énergie cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport repère R est le scalaire

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in E} \left[ \overline{V(P/R)} \right]^2 dm$$

#### 4.2. Cas du solide :

Soit (S) : un solide de masse m, de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à R.



$$T(E/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in E} \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right]^2 dm$$

$$2T(E/R) = \int_{P \in E} \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right] \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right] dm$$

Si le point  $A \in (S)$ ,  $\overline{V(P \in S/R)} = \overline{V(A \in S/R)} + \overline{\Omega(S/R)} \wedge \overline{AP}$

$$\begin{aligned} 2T(E/R) &= \int_{P \in E} \left[ \overline{V(A \in S/R)} + \overline{\Omega(S/R)} \wedge \overline{AP} \right] \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right] dm \\ &= \overline{V(A \in S/R)} \int_{P \in E} \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right] dm + \int_{P \in E} \left( \overline{\Omega(S/R)} \wedge \overline{AP} \right) \left[ \overline{V(P \in S/R)} \right] dm \\ &= \overline{V(A \in S/R)} m \overline{V(G \in S/R)} + \overline{\Omega(S/R)} \int_{P \in E} \overline{AP} \wedge \overline{V(P \in S/R)} dm \\ &= \overline{V(A \in S/R)} m \overline{V(G \in S/R)} + \overline{\Omega(S/R)} \sigma_A(S/R) \\ &= \{C(S/R)\}_A \{ \vartheta(S/R) \}_A \end{aligned}$$

Cas particuliers

- Le point A est fixe dans R :

$$\begin{aligned} 2T(S/R) &= \overline{\Omega(S/R)} \sigma_A(S/R) \\ &= \overline{\Omega(S/R)} [I_A(S)] \overline{\Omega(S/R)} \end{aligned}$$

- Le point A et le centre d'inertie G sont confondus :

$$\begin{aligned} 2T(S/R) &= m \left[ \overline{V(G \in S/R)} \right]^2 + \overline{\Omega(S/R)} \sigma_G(S/R) \\ &= m \left[ \overline{V(G \in S/R)} \right]^2 + \overline{\Omega(S/R)} [I_G(S)] \overline{\Omega(S/R)} \end{aligned}$$

- Le solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe  $(O, \vec{Z})$  du repère R, soient :

$I_{OZ}$  : le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $(O, \vec{Z})$

$$\overline{\Omega(S/R)} = \omega \vec{Z}$$

$$\text{Alors } 2T(S/R) = I_{OZ} \omega^2$$

- Le solide (S) est animé d'un mouvement plan dans le plan  $(O, \vec{X}, \vec{Y})$  du repère

$R(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  soient :

$I_{GZ}$  : le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe  $(G, \vec{Z})$

$$\overline{\Omega(S/R)} = \omega \vec{Z}$$

$$\text{Alors } 2T(S/R) = m \left[ \overline{V(G \in S/R)} \right]^2 + I_{GZ} \omega^2$$

## Exercices :

### Exercice 1.(pendule double)

Le pendule double présenté par la figure 1 est constitué de deux tiges 1 et 2, identiques, homogènes de masse m et de longueur 2a.



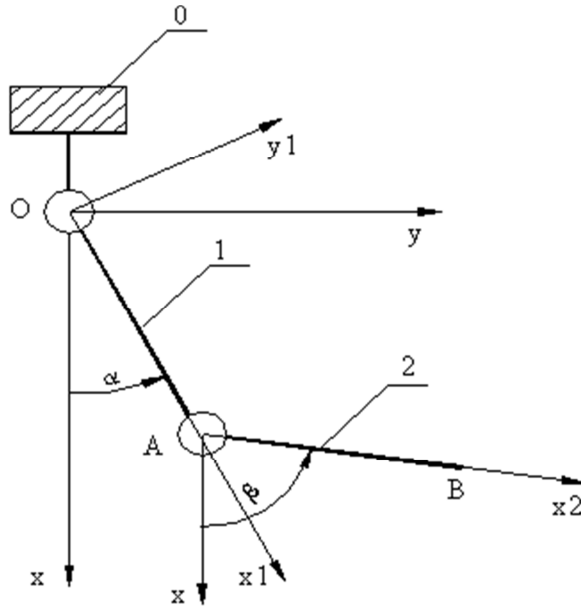


Figure 1 : pendule double ;

1. Déterminer la matrice d'inertie de la tige 2 au point A dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$  ;
2. Déterminer le torseur cinématique de la tige 2 au point A dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;
3. Déterminer le moment cinétique, au point A, de la tige 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;
4. Déterminer le moment cinétique, au point O, de la tige 2 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;
5. Déterminer le moment cinétique, au point O, de la tige 1 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;
6. Déterminer le moment dynamique, au point O, de l'ensemble des deux tiges dans leur mouvement par rapport à  $R_0$  ;
7. Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble des deux tiges dans leur mouvement par rapport à  $R_0$  ;

### Exercice 2 : (éolienne)

L'éolienne donnée par la figure 4 est constituée d'une girouette 1, d'une hélice 2 et d'un balourd 3 autre que le bâti. La girouette 1 a une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$  avec le bâti. L'hélice 2, constituée de deux pales, a une liaison pivot d'axe  $(G, \vec{x}_1)$  avec la girouette 1. Le balourd 3 est placé au point P tel que

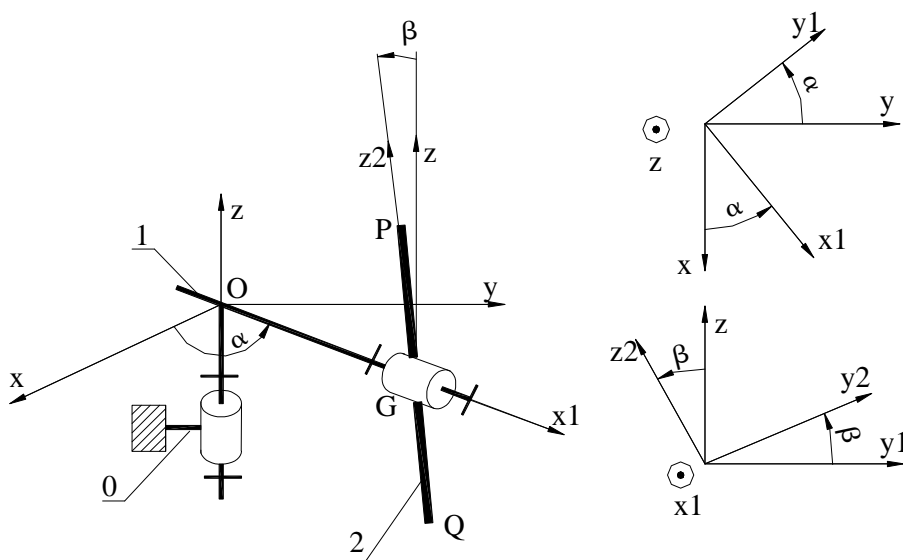


Figure 4 : éolienne

## Caractéristiques géométriques et d'inertie :

### Girouette 1 :

- $\overline{OG} = a.\vec{x}_1$
- Le moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{z})$  est notée par I, l'axe  $(O, \vec{z})$  est une axe principal d'inertie.

### Balourd 3 :

- De masse m

### Hélice 2 :

- centre d'inertie G
- masse M

- matrice d'inertie centrale donnée par le constructeur de la forme :  $[I_G(2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$  , B=C

## I. Etude cinématique :

- 1- Déterminer le torseur cinématique de la girouette 1 au point O dans son mouvement par rapport au bâti.
- 2- Déterminer le torseur cinématique de l'hélice 2 au point G dans son mouvement par rapport au bâti.
- 3- Déterminer la vitesse du balourd P dans son mouvement par rapport au bâti.

## II. Etude cinétique :

- 1- Déterminer le moment cinétique au point O de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au bâti 0.
- 2- Déterminer le moment cinétique au point O de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0.
- 3- Déterminer la projection sur l'axe z du moment dynamique au point O de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport au bâti 0.
- 4- Déterminer le moment cinétique au point O du balourd 3 dans son mouvement par rapport au bâti 0
- 5- Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble  $(1 \cup 2 \cup 3)$  dans leur mouvement par rapport au repère lié au bâti.



# Théorèmes généraux de la dynamique des solides indéformables

## 2. Principe fondamental de la dynamique :

Il existe au moins un repère galiléen  $Rg$ , tels que pour tout système matériel  $E$  en mouvement par rapport à  $Rg$ , le torseur dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $Rg$  soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à  $E$ .

$$\{D(E/Rg)\} = \{F(\bar{E} \rightarrow E)\} \quad \text{avec } \bar{E} : \text{extérieur de } E$$

## 2. Théorèmes généraux de la dynamique :

Soient  $m$ , la masse et  $G$ , le centre d'inertie du système matériel  $E$  en mouvement par rapport au repère galiléen  $Rg$ . En un point  $A$  quelconque, on :

$$\{D(E/Rg)\} = \begin{Bmatrix} m\bar{\Gamma}(G/Rg) \\ \bar{\delta}_A(E/Rg) \end{Bmatrix}$$
$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \bar{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) \end{Bmatrix}$$

### 2.1. Théorème de la résultante dynamique :

Pour tout système matériel  $E$  en mouvement par rapport au repère Galiléen  $Rg$ , la résultante dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $Rg$  est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à  $E$ .

$$\bar{R}(\bar{E} \rightarrow E) = m\bar{\Gamma}(G/Rg)$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires.

### 2.2. Théorème du moment dynamique :

Pour tout système matériel  $E$  en mouvement par rapport au repère Galiléen  $Rg$ , le moment dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $Rg$  est égal au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à  $E$ .

$$\bar{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = \bar{\delta}_A(E/Rg)$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires.

### 2.3. Equation de mouvement :

#### 2.3.1. Définition 1 :

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre, déduite du principe fondamental de la dynamique, dans laquelle ne figure aucune inconnue d'action mécanique.

### 2.3-2 Définition 2 :

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

### 2.4. Principe fondamental dans un repère non galiléen :

Soient :

$Rg$  : un repère galiléen

$R$  : un repère ayant un mouvement quelconque

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au système matériel  $E$  dans son mouvement par rapport à  $Rg$  est :

$$\{D(E/Rg)\} = \{F(\bar{E} \rightarrow E)\}$$

$$\text{or } \{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \bar{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_A \overline{AP} \wedge \bar{\Gamma}(P/R) dm \end{array} \right\}$$

D'après la relation de composition des vecteurs accélération :

$$\bar{\Gamma}(P/Rg) = \bar{\Gamma}(P/R) + \bar{\Gamma}(P \in R/Rg) + 2\bar{\Omega}(R/Rg) \wedge \bar{V}(P/R)$$

Considérons les trois torseurs suivants :

- Le torseur dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$

$$\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \bar{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_A \overline{AP} \wedge \bar{\Gamma}(P/R) dm \end{array} \right\}$$

- Le torseur des forces d'inertie d'entraînement de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  et  $Rg$

$$\{D_{ie}(E \in R/Rg)\} = - \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \bar{\Gamma}(P \in R/Rg) dm \\ \int_A \overline{AP} \wedge \bar{\Gamma}(P \in R/Rg) dm \end{array} \right\}$$

- Le torseur des forces d'inertie de Coriolis de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R$  et  $Rg$

$$\{D_{ic}(E, R/Rg)\} = - \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} 2\bar{\Omega}(R/Rg) \wedge \bar{V}(P/R) dm \\ \int_A \overline{AP} \wedge [2\bar{\Omega}(R/Rg) \wedge \bar{V}(P/R)] dm \end{array} \right\}$$

Par suite le principe fondamental de la dynamique devient :

$$\{D(E/R)\} = \{F(\bar{E} \rightarrow E)\} + \{D_{ie}(E \in R/Rg)\} + \{D_{ic}(E, R/Rg)\}$$

### Exercices :

#### Exercice 1 :

La figure 1 schématise le principe d'un hayon sur parallélogramme déformable. Ce système de manutention est constitué de deux vérins qui permettent l'ouverture, l'inclinaison et la fermeture du

plateau. Il s'adapte à l'arrière du véhicule et est solidaire au châssis. Un tel mécanisme ne permet l'élévation ou l'abaissement de charges qu'entre le sol et le plancher du véhicule.

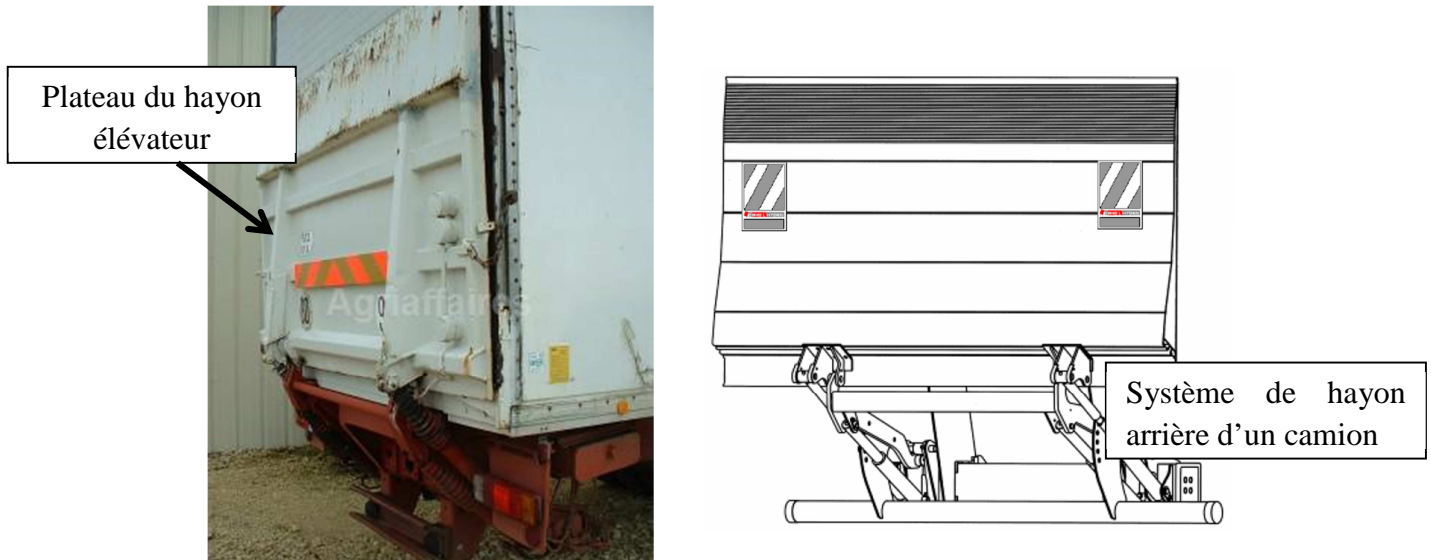


Figure 1 : Schéma d'architecture du hayon arrière d'un camion

On distingue deux phases de fonctionnement du mécanisme du hayon : une phase de travail (déplacement du plateau du niveau plancher du camion au niveau sol) et une phase de fermeture ou ouverture du plateau.

Dans la phase de travail, on a seulement le vérin (1+2) qui agit sur le bras 3 pour assurer la montée ou la descente du plateau. Lors de cette phase, le plateau est maintenu horizontal soit donc  $\bar{x}_0 = \bar{x}_6$  et  $\bar{y}_0 = \bar{y}_6$  et  $\overline{CD} = \overline{EH}$  (figure 2).

Dans la phase d'ouverture ou de fermeture du plateau, on a seulement le vérin (4+5) qui agit sur le plateau 6 (figure 3).

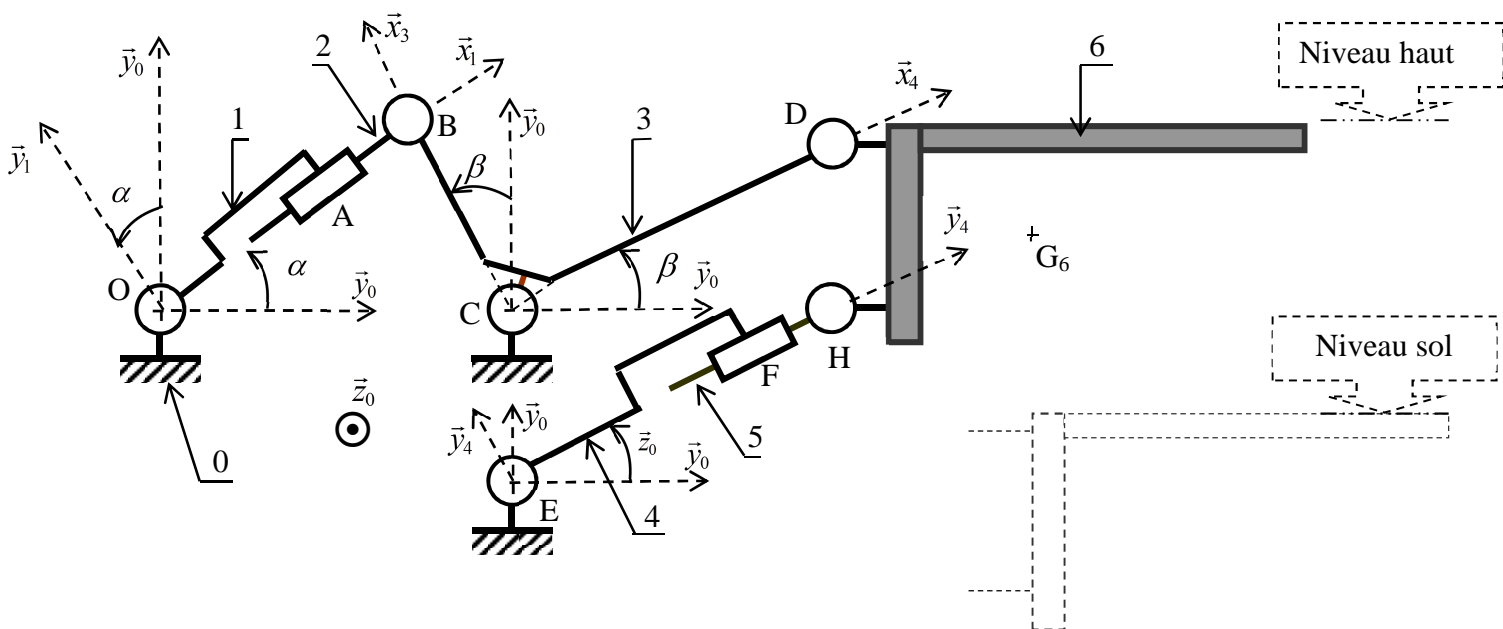


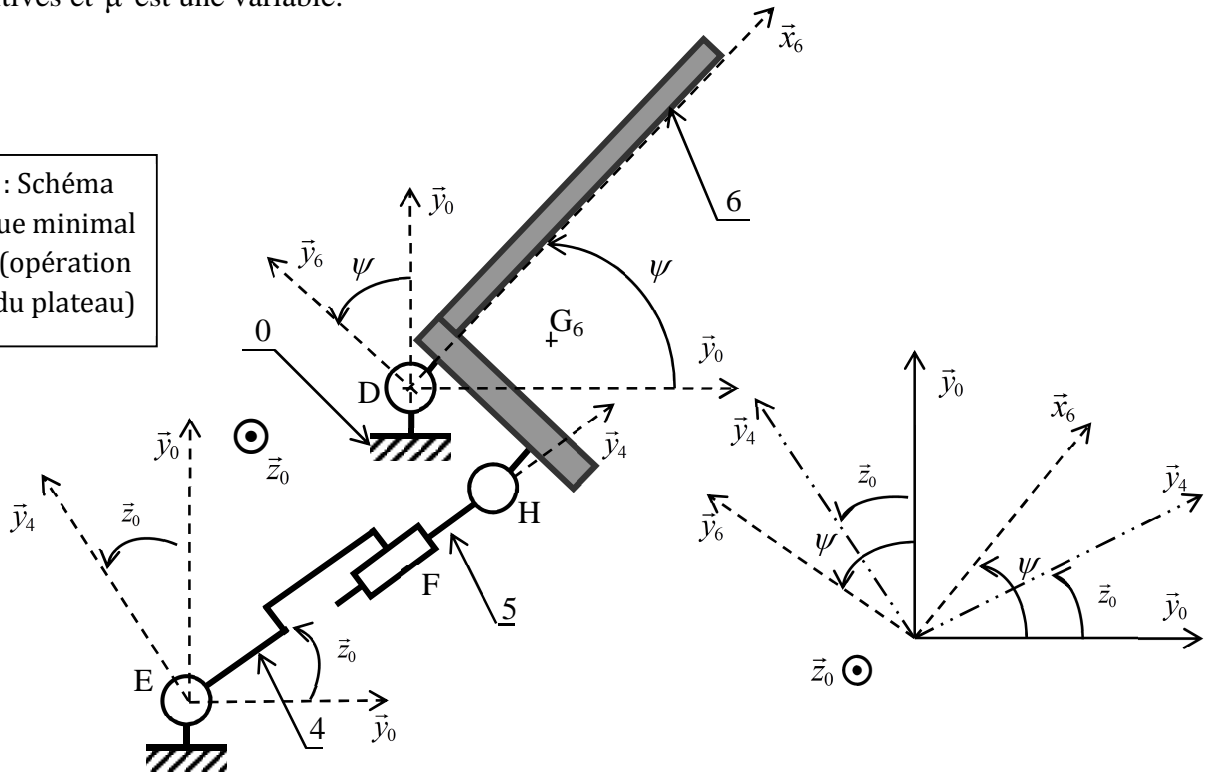
Figure 2 : Schéma cinématique du hayon (phase de travail)

### Repères et paramétrage pour la phase d'ouverture et de fermeture du plateau 6 :

Lors de l'opération d'ouverture ou de fermeture du plateau, le centre de l'articulation D entre le plateau 6 et le bras 3 reste un point fixe dans le bâti. Pour cela on adopte le modèle cinématique simplifié suivant.

On donne  $\overline{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$ ,  $\overline{HD} = h\vec{y}_6$ ,  $\overline{FH} = \mu\vec{x}_4$ ,  $\overline{EF} = d\vec{x}_4$  et  $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_6) = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$  avec : e, f, h, d sont des constantes positives et  $\mu$  est une variable.

Figure 3 : Schéma cinématique minimal du hayon (opération du pliage du plateau)



**Modèle géométrique du plateau 6 :**

Le plateau 6 est modélisé par deux plaques (61 et 62) homogènes et d'épaisseurs négligeables. Les deux plaques 61 et 62 présentent la même masse surfacique  $\sigma$ .

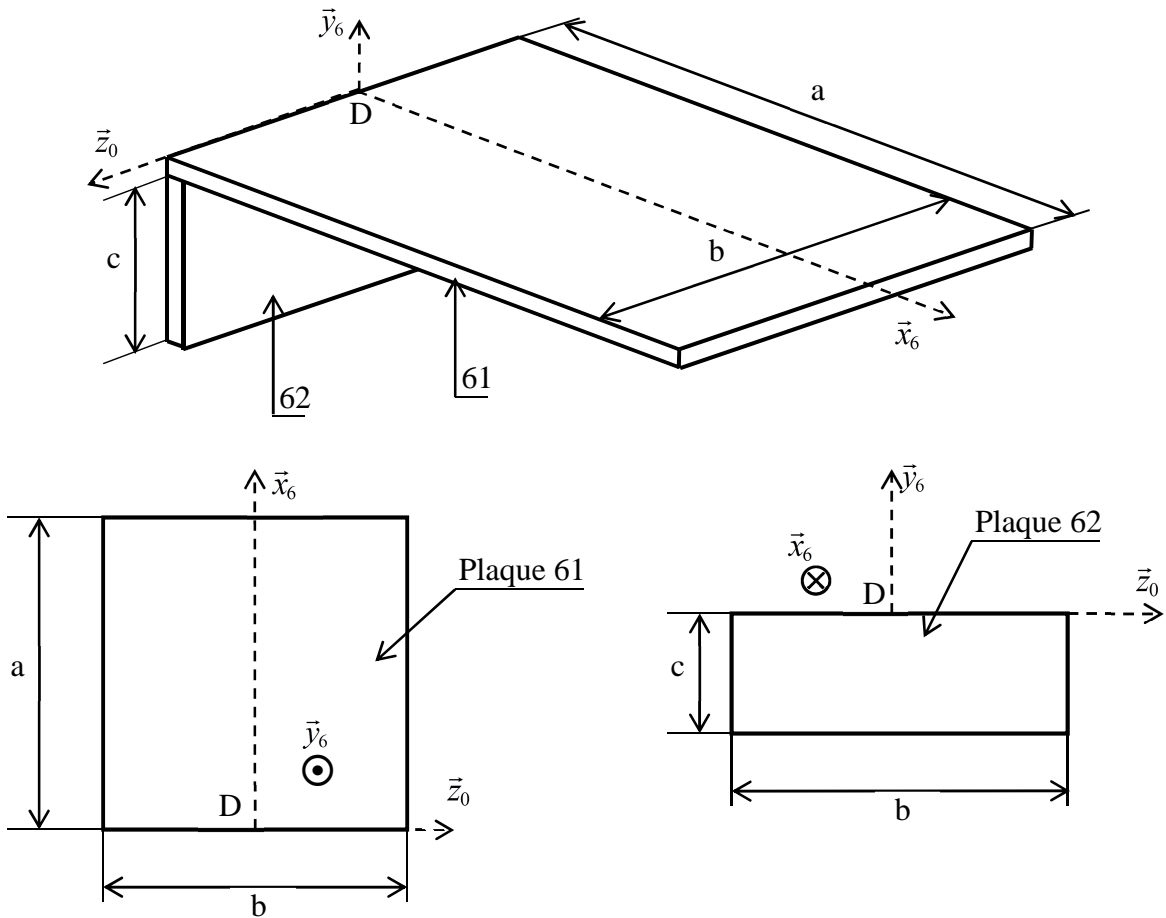


Figure 4 : Modèle géométrique du plateau 6



## 1. Géométrie des masses :

En se basant sur le modèle géométrique du plateau 6 donné par la figure 4, on demande de :

1.1. Déterminer la position du centre d'inertie du plateau 6 ;  $\overline{DG}_6$

1.2. La matrice d'inertie du plateau 6 est donnée par la matrice suivante :

$$[I_D(6)] = \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix}_{R_6} ; \text{ Justifier cette forme.}$$

1.3. Déterminer la matrice d'inertie de 61 au point D dans la base du repère  $R_6$ . Les éléments de la matrice seront exprimés en fonction de  $\sigma$  et d'autres données géométriques.

1.4. Déterminer la matrice d'inertie de 62 au point D dans la base du repère  $R_6$ . Les éléments de la matrice seront exprimés en fonction de  $\sigma$  et d'autres données géométriques.

1.5. Déduire le moment d'inertie du plateau 6 par rapport à l'axe  $(D, \bar{z}_0)$  :  $C_6 = I_{D\bar{z}_0}(6)$ .

## 2- Etude dynamique : opération de la fermeture du plateau 6

2.1. Exprimer dans la base de  $R_6$  la vitesse du centre d'inertie  $G_6$  du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .  $\vec{V}(G_6 \in 6/R_0)$  sachant que  $\overline{DG}_6 = x_G \bar{x}_6 + y_G \bar{y}_6$ .

2.2. Exprimer dans la base de  $R_6$  l'accélération du centre d'inertie  $G_6$  du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .  $\vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0)$

2.3. Exprimer dans la base du repère  $R_6$  les éléments de réduction du torseur cinétique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  sachant que le plateau 6 est de masse  $m_6$  et admet une matrice d'inertie diagonale au point D et dans la base du repère  $R_6$  avec  $I_{D\bar{z}_0}(6) = I$ .

2.4. Exprimer dans la base du repère  $R_6$  les éléments de réduction du torseur dynamique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

2.5. Exprimer au point D et dans la base du repère  $R_6$  les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne  $\vec{g} = -g\bar{y}_0$ , l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le

plateau 6 est donnée par le torseur suivant  $\{F(5 \rightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0 \bar{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$  et on suppose que toutes les liaisons

sont parfaites.

2.6. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$  supposé galiléen, déterminer les inconnues d'actions mécaniques de la liaison pivot d'axe  $(D, \bar{z}_0)$  et exprimer l'effort  $F_0$  qu'exerce la tige de vérin 5 sur le plateau 6 en fonction de  $m_6, h, x_G, y_G, g, I, \psi, \ddot{\psi}$  et  $\theta$

2.7. Calculer l'énergie cinétique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à  $R_0$

**Exercice 2 :**

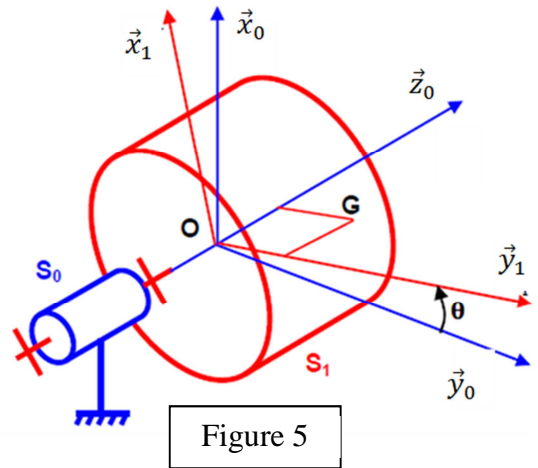
**Partie1 :**

Soit un solide  $S_1$  de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti  $S_0$  (figure 5). Ce solide ( $S_1$ ) est soumis à un couple moteur  $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$ .

- Le repère  $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié à  $S_0$ .
- Le repère  $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  est lié à  $S_1$ .
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- $\vec{OG} = \alpha \vec{x}_1 + c \vec{z}_0$
- Le solide  $S_1$  est de masse  $m$
- La matrice d'inertie de  $S_1$  est donnée par la matrice suivante :

$$[I_0(S_1)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_1}$$

- L'accélération de la pesanteur est donnée par :  $\vec{g} = -g \vec{x}_0$



1. Déterminer l'accélération  $\vec{\Gamma}(G \in S_1/R_0)$ .
2. Déterminer le moment dynamique  $\vec{\delta}_O(S_1/R_0)$ .
3. Exprimer dans  $R_0$  le torseur dynamique  $\{D(S_1/R_0)\}_O$ .
4. Isoler  $S_1$  et Exprimer dans  $R_0$  le torseur des efforts extérieurs appliqués sur  $S_1$  au point  $O$ .
5. Déterminer les 6 équations scalaires qui découlent du PFD appliqué à  $S_1$ .
6. En déduire les 5 composantes du torseur statique de la liaison pivot entre  $S_1$  et  $S_0$ .
7. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces 5 composantes soient constantes. En déduire les valeurs de  $a, E$  et  $D$

**Partie2 :**

Nous avons montré dans la partie 1 que les conditions d'équilibre d'un solide conduisent à :

- **Equilibrage statique : le centre d'inertie  $G$  de  $S_1$ , doit être sur l'axe de rotation**
- **Equilibrage dynamique : l'axe de rotation est un axe principal d'inertie**

On souhaite réaliser l'équilibre d'une roue  $S_3$  de véhicule (voir figure 6) dont la symétrie de révolution n'est plus respectée.

Soient :

- Le repère  $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$  est lié à  $S_3$ .
- Le solide  $S_3$  est de masse  $m_3$  et de centre d'inertie  $G_3$  avec  $\vec{O_3G_3} = a \vec{x}_3 + b \vec{y}_3 + c \vec{z}_3$ .
- La matrice d'inertie de  $S_3$  est donnée par :

$$[I_{O_3}(S_3)] = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{R_1}$$



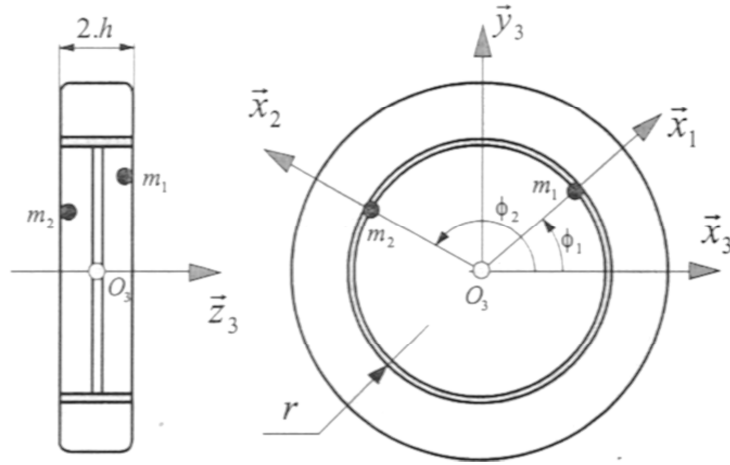


Figure 6 : Roue de véhicule à équilibrer

Afin d'équilibrer une roue, on peut rajouter deux masselottes (masses ponctuelles),  $S_1$  de masse  $m_1$  et de centre  $G_1$  et  $S_2$  de masse  $m_2$  et de centre  $G_2$ . Ces deux masselottes sont fixées sur la jante, à un rayon  $r$ , de part et d'autre de la roue (voir figure 6), à une distance  $h$  du plan de symétrie de la roue.

La position des deux masselottes est identifiée par deux repères  $R_1(O_3, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  et  $R_3(O_3, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ , repérés par les angles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  tels que  $\phi_1 = (\vec{x}_3, \vec{x}_1)$  et  $\phi_2 = (\vec{x}_3, \vec{x}_2)$ .  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont des constantes.

On appellera  $S$  le système composé par les trois solides  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , de centre d'inertie  $G$  et de matrice d'inertie donnée par :

$$[I_{O_3}(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_3}$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{O_3G}$  dans le repère  $R_3$ .
2. Déterminer les deux équations scalaires traduisant la condition d'équilibrage statique dans le repère  $R_3$ .
3. Exprimer  $D$  et  $E$  en fonction des données géométriques du problème et des composantes de  $[I_{O_3}(S_3)]$ .
4. Donner les deux équations scalaires traduisant la condition d'équilibrage dynamique dans  $R_3$ .



# Théorème de l'énergie-puissance :

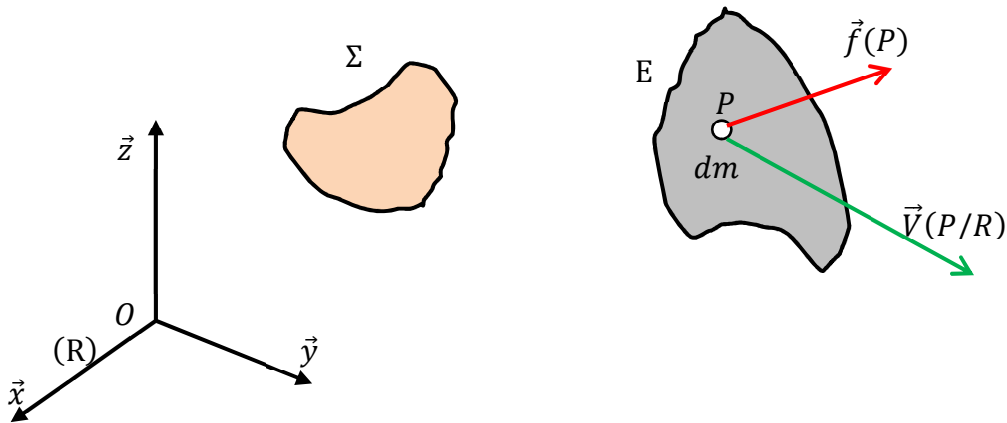
## 1. Puissance

### 1.1. Puissance développée par une action mécanique extérieure à un système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R

#### 1.1.1. Définition

La puissance développée, à la date t, par l'action mécanique de  $\Sigma$  sur E dans son mouvement par rapport à R est :

$$P(\Sigma \rightarrow E / R) = \int_{P \in E} \vec{f}(P) \cdot \vec{V}(P/R) dm$$



#### Remarque :

Si l'action mécanique de  $\Sigma$  sur E est représentée par la force  $(P, \vec{F}(P))$ , la puissance développée s'écrit alors :

$$P(\Sigma \rightarrow E / R) = \vec{F}(P) \cdot \vec{V}(P/R)$$

#### 1.1.2. Cas d'un solide :

Pour le cas d'un solide, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{V}(P/R) &= \vec{V}(P \in S / R) \\ P(\Sigma \rightarrow S / R) &= \int_{P \in S} \vec{f}(P) \vec{V}(P \in S / R) dm \\ &= \int_{P \in S} \vec{f}(P) \left[ \vec{V}(A \in S / R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP} \right] dm \\ &= \int_{P \in S} \vec{f}(P) \vec{V}(A \in S / R) dm + \int_{P \in S} \vec{f}(P) \cdot (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}) dm \\ &= \vec{V}(A \in S / R) \int_{P \in S} \vec{f}(P) dm + \vec{\Omega}(S/R) \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{f}(P) dm \end{aligned}$$

Avec :

$$\{F(\Sigma \rightarrow S)\}_A = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\Sigma \rightarrow S) \\ \bar{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R}(\Sigma \rightarrow S) = \int_{P \in S} \bar{f}(P) dm$$

$$\bar{M}_A(\Sigma \rightarrow S) = \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \bar{f}(P) dm$$

$$d'où P(\Sigma \rightarrow S/R) = \bar{R}(\Sigma \rightarrow S) \bar{V}(A \in S/R) + \bar{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \cdot \bar{\Omega}(S/R)$$

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \{F(\Sigma \rightarrow S)\}_A \{V(S/R)\}$$

La puissance développée par l'action mécanique du système matériel  $\Sigma$  sur le solide  $S$  est donnée par :

$$P(\Sigma \rightarrow S/R) = \{F(\Sigma \rightarrow S)\}_A \{\vartheta(S/R)\}_A$$

### Remarque :

La puissance développée par une action mécanique extérieure dépend du repère choisi, en effet, on a :

$$\square P(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{P \in E} \bar{f}(P) \bar{V}(P/R) dm$$

$$\square P(\Sigma \rightarrow E/R_1) = \int_{P \in E} \bar{f}(P) \bar{V}(P/R_1) dm$$

$$\Rightarrow P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) = \int_{P \in E} \bar{f}(P) \cdot (\bar{V}(P/R) - \bar{V}(P/R_1)) dm$$

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) = \int_{P \in E} \bar{f}(P) \bar{V}(P \in R_1/R) dm = \{F(\Sigma \rightarrow E)\} \cdot \{V(R_1/R)\}$$

**La puissance développée par une action mécanique extérieure dépend du repère choisi.**

## 1.2. Puissance développée par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels :

### 1.2.1. Définition

La puissance développée, à la date  $t$ , par les actions mutuelles entre  $(\Sigma)$  et  $(E)$ , dans leur mouvement par rapport à un repère  $r$  est :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) = P(\Sigma \rightarrow E/R) + P(E \rightarrow \Sigma/R)$$

### Remarque

La puissance développée par les actions mutuelles entre  $(\Sigma)$  et  $(E)$  est indépendante du repère  $R$  par rapport auquel les deux systèmes sont en mouvement.

En effet :

$$\begin{aligned}
& P(\Sigma \leftrightarrow E / R) - P(\Sigma \rightarrow E / R_1) = \{F(\Sigma \rightarrow E)\} \{V(R_1 / R)\} \\
& + \\
& P(E \rightarrow \Sigma / R) - P(E \rightarrow \Sigma / R_1) = \{F(E \rightarrow \Sigma)\} \{V(R_1 / R)\} \\
\hline
& = P(\Sigma \leftrightarrow E / R) - P(\Sigma \leftrightarrow E / R_1) = \underbrace{\left( \{F(\Sigma \rightarrow E)\} + \{F(E \rightarrow \Sigma)\} \right)}_0 \{V(R_1 / R)\}
\end{aligned}$$

D'où :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E / R) = P(\Sigma \leftrightarrow E / R_1)$$

**Notation :**

La puissance développée par les actions mutuelles est notée par :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E)$$

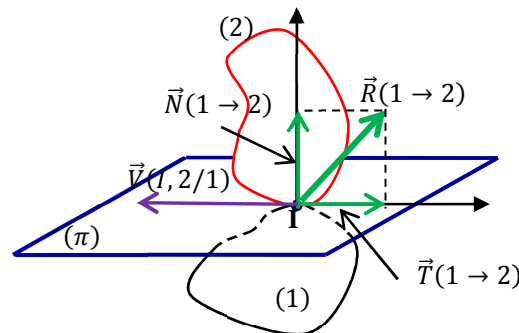
### 1.3. Liaison parfaite entre deux solides

#### 1.3.1 : Définition :

Deux solides 1 et 2 ont une liaison parfaite, d'un point de vue énergétique, si quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance des actions mutuelles entre les solides 1 et 2 est nulle :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = 0$$

#### 1.3.2. Cas d'une liaison ponctuelle



Le contact est supposé rigoureusement ponctuel, le torseur d'actions mécaniques du solide 1 sur le solide 2 est de la forme, au point A :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = \vec{N}(1 \rightarrow 2) + \vec{T}(1 \rightarrow 2)$$

$$\vec{N}(1 \rightarrow 2) \perp (\Pi)$$

$$\vec{T}(1 \rightarrow 2) \in (\Pi)$$

Le torseur cinématique du mouvement du solide (2) par rapport au solide (1) est de la forme, au point A :

$$\{\vartheta(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(A \in 2/1) \end{Bmatrix}_A$$

$\vec{V}(A \in 2/1) \in (\Pi)$  : vecteur vitesse de glissement

- Déterminer la puissance des actions mutuelles entre les solides (1) et (2),
- A quelle condition la liaison est-elle parfaite ?

**Réponses :**

➤ **Puissance des actions mutuelles entre les solides (1) et (2),**

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \{F(1 \rightarrow 2)\} \{\vartheta(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(A \in 2/1) \end{Bmatrix}_A$$

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(A \in 2/1) = \vec{T}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(A \in 2/1)$$

➤ **Condition la liaison est-elle parfaite**

Liaison est parfaite  $\Rightarrow P(1 \leftrightarrow 2) = 0$ , cette condition est réalisée si ;

- $f = 0$
- les deux solides roulent sans glisser l'un sur l'autre (C.R.S.G)

## 2. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide :

### 2.1. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide :

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide S, dans son mouvement par rapport à  $Rg$ .

$$\{D(S/Rg)\} = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\}$$

$$\{D(S/Rg)\} \{\vartheta(S/Rg)\} = \{F(\bar{S} \rightarrow S)\} \{\vartheta(S/Rg)\} = P(\bar{S} \rightarrow S/Rg)$$

$$\{D(S/Rg)\} \{\vartheta(S/Rg)\} = \vec{V}(A \in S/Rg) \cdot \int_{P \in S} \vec{\Gamma}(P \in S/Rg) dm + \vec{\Omega}(S/Rg) \cdot \int_{P \in S} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/Rg) dm$$

$$\text{or } \vec{V}(A \in S/Rg) = \vec{V}(P \in S/Rg) + \vec{\Omega}(S/Rg) \wedge \overline{PA}$$

Alors

$$\{D(S/Rg)\} \{\vartheta(S/Rg)\} = \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/Rg) \vec{\Gamma}(P \in S/Rg) dm$$

$$\{D(S/Rg)\} \{\vartheta(S/Rg)\} = \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/Rg) \frac{d}{dt} \vec{V}(P \in S/Rg) dm = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}(P \in S/Rg))^2 dm \right]$$

d'où finalement :

$$P(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \frac{d}{dt} T(S/Rg)$$

**Théorème :**

La dérivée, par rapport à la date t, de l'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $Rg$  est égal à la puissance des actions mécaniques extérieures à S dans son mouvement par rapport à  $Rg$ .

$$P(\bar{S} \rightarrow S/Rg) = \frac{d}{dt} T(S/Rg)$$

## 2.2. Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides :

Soit un système matériel  $E = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$

Les solides  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  sont en mouvement par rapport au repère galiléen  $R_g$ .

Pour chacun des solides  $S_i$ , le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(S_i / R_g) = P(\bar{S}_i \rightarrow S_i / R_g)$$

Ajoutons membre à membre les  $n$  relations analogues :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(S_i / R_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i / R_g)$$

$$\frac{d}{dt} T(E / R_g) = \sum_{i=1}^n P(\bar{S}_i \rightarrow S_i / R_g) = P(\bar{E} \rightarrow E / R_g) + \sum_{\substack{i=j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

finalement

$$\frac{d}{dt} T(E / R_g) = P(\bar{E} \rightarrow E / R_g) + \sum_{\substack{i=j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

### **Théorème :**

La dérivée, par rapport à la date  $t$ , de l'énergie cinétique d'un ensemble  $E$  de solides dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $R_g$  est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures à  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_g$  et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide de  $E$ .

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = P(\bar{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i=j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

### **Exercices :**